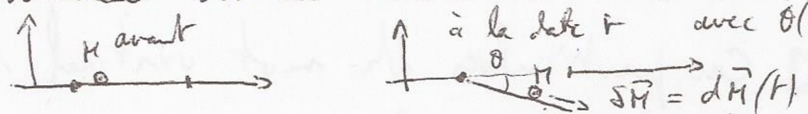
MpIC 2 annexe à II A (2) c) PRINCIPE DES TRAVAUX VIRTUELS ET DES PUISSANCES VIRTUELLES

b) PTV → PPV :

D'une manière générale, vu la complexité des systèmes, le bilan énergétique sur les mvts réels s'avère insuffisant à la détermination des efforts et déplacements inconnus.

Déf : un mouvement virtuel μ^* à l'instant t d'un système matériel Σ est la donnée d'un champs de vecteurs $\vec{V}^*(M)$ $\forall M \in \Sigma$ appelé champs de vitesses virtuelles c.v.v.

Remarque : μ^* est défini à t fixé, il représente ce qui pourrait se passer d'un point de vue cinématique à partir de cet instant t. Ce qui se passera effectivement est le mouvement réel, mvt virtuel particulier. Ex :



Si $\mu^* \in \mathcal{U}_t^*$ on a intérêt à choisir $\mathcal{U}_t^*$ le plus riche possible (ex. de la valise). Dans le cas de solides en mvt on a :

Déf : un mvt virtuel μ^* défini sur Σ à t donné est dit rigidifiant ssi $\vec{V}^*(M)$ est un champ de moments.

Conséquence : on sait du cours sur les torseurs qu'il existe $\vec{\omega}^*$ indépendant de $M \in \Sigma$ tel que $\left\{ \vec{\omega}^* \mid \vec{V}^*(M) \right\}_M$ est un torseur. Utilité d'avoir $\vec{V}^*(M) \perp \vec{R}_{\text{liaison}}$.

Déf : on appelle puissance virtuelle développée par une force $\vec{F}$ appliquée en M dans le mvt μ^* l'application

$$\mathcal{P}^* : \mathcal{U}_t^* \rightarrow \mathbb{R} \quad \text{telle que} \quad \mathcal{P}^*(\vec{V}^*(M)) = (\vec{F} \mid \vec{V}^*(M))$$

Si $\forall M \in \Sigma$ entouré par dv s'exerce une densité de force $\vec{f}(M)$, la puissance virtuelle développée sur Σ tout entier est

$$\mathcal{P}^* = \iiint_\Sigma \vec{f}(M) \cdot \vec{V}^*(M)\, dv$$

<u>Déf</u> : On appelle qté d'accélération relativement à la mesure masse dm le champ de forces dit d'inerties : $M \longmapsto \vec{a}_{M/R}\, dm$ ou encore plus précisément $M \longmapsto \vec{a}_{M/R} \cdot \rho(M)\, dv$.

La puissance virtuelle développée sur Σ tout entier développée par les forces d'inertie est : $\mathcal{A}^* = \iiint_\Sigma \vec{a}_{M/R} \cdot \vec{V}^*(M) \rho(M)\, dv$.

$\triangleleft$ Cas particulier du mvt virtuel rigidifiant : on considère un champ de forces élémentaires $d\vec{F}$ défini $\forall M \in \Sigma$ et le torseur $\left\{ \vec{\omega}^* \mid \vec{V}^*(M) \right\}_M$ avec $d\vec{F} = \vec{f}\, dv$ où $d\vec{F} = \vec{a}_{M/R} \cdot \rho(M)\, dv$. On a $\mathcal{P}^* = \iiint_\Sigma d\vec{F} \cdot \vec{V}^*(M)$ mais

$\vec{V}^*(M) = \vec{V}^*(P) + \vec{MP} \wedge \vec{\omega}^* \Rightarrow$

$$\mathcal{P}^* = \iiint_\Sigma d\vec{F} \cdot \vec{V}^*(P) + \iiint_\Sigma d\vec{F} \left(\vec{MP} \wedge \vec{\omega}^* \right) \Leftrightarrow$$

$$'' = V^*(P) \iiint_\Sigma d\vec{F} + \vec{\omega}^* \iiint_\Sigma d\vec{F} \wedge \vec{MP} \quad \text{or}$$

$\iiint_\Sigma d\vec{F} = \vec{R}_F$ et $\iiint_\Sigma \vec{PM} \wedge d\vec{F} = \vec{\mathcal{M}}_F(P)$ de sorte que l'on écrit :

$\mathcal{P}^* = \{F\}_P \otimes \{\mu^*\}_P$ produit torsoriel. ▷

◁ Considérons Σ composé de n points matériels M_i $i=1,\dots,N$ et $\vec{F}_i$ le champ de vecteurs force associé (chaque $\vec{F}_i$ est une résultante). On désignera par $\vec{F}_{ij}$ la force qu'exerce M_i sur M_j.

D'après les lois de la dynamique de Newton il existe au moins un référentiel galiléen R_g tel que si $\vec{a}_i$ est l'accél. de M_i dans R_g on a : $\forall M_i$ et M_j $i \neq j$

(i) $\overrightarrow{M_iM_j} \wedge \vec{F}_{ij} = \vec{0}$ (ii) $m_i \vec{a}_i = \vec{F}_i + \sum_{j \neq i} \vec{F}_{ji}$

(iii) $\vec{F}_{ji} = -\vec{F}_{ij}$. Multiplions (ii) par $\vec{V}_i^*$ définissant un μ^*. et sommation pour tous les i il vient : avec $\vec{V}_i^* = \vec{V}^*(M_i)$

$$\sum_{i=1}^{N} m_i \vec{a}_i \cdot \vec{V}_i^* = \sum_{i=1}^{N} \vec{F}_i \cdot \vec{V}_i^* + \sum_{i=1}^{N} \left(\sum_{j \neq i} \vec{F}_{ji} \right) \vec{V}_i^* \Leftrightarrow$$

$$\boxed{\mathcal{A}^* = \mathcal{P}^*_{ext} + \mathcal{P}^*_{int}}$$ et on énonce :

PTV pour un système discret la puissance virtuelle des qté d'accélération est égale à la somme des puissances virtuelles des efforts extérieurs et intérieurs à ce système. ▷

◁ Pour 2 points M_i et $M_j \neq M_i$ de Σ la puissance virtuelle des intereffects est : $\vec{F}_{ji} \cdot \vec{V}_i^* + \vec{F}_{ij} \vec{V}_j^* = \vec{F}_{ij} \left(\vec{V}_j^* - \vec{V}_i^* \right)$ d'après la loi d'action-réaction. Considérons alors que ces 2 points sont élément d'un sous système Σ' de Σ tel que la restriction de μ^* à Σ' soit rigidifiant, alors comme on a :

$\vec{V}_j^* = \vec{V}_i^* + \overrightarrow{M_j M_i} \wedge \vec{\omega}^*_{\Sigma'}$ la puissance virtuelle des interefforts est $\vec{F}_{ij} \cdot \left(\overrightarrow{M_j M_i} \wedge \vec{\omega}^*_{\Sigma'}\right) = \vec{\omega}^*_{\Sigma'} \cdot \left(\overrightarrow{M_i M_j} \wedge \vec{F}_{ij}\right) = \left(\vec{\omega}^*_{\Sigma'} \middle| \vec{O}\right) = \vec{O}$ On peut énoncer le :

> <u>Théo</u> : pour tout sous système Σ' d'un système Σ quelconque et pour tout mvt virtuel rigidifiant Σ', la puissance virtuelle des interefforts est nulle. $\triangleright$

Plus généralement on a le

> <u>TPV</u> : il existe au moins un réf. galiléen R_g tel que pour tout sous système de Σ en mvt dans R_g et à chaque instant t fixé :
>
> * la puissance virtuelle des interefforts est nulle dans tout mvt virtuel rigidifiant ce sous système.
>
> * dans tout mvt virtuel, la puissance virtuelle des qtés d'accélération est égale à la puissance des efforts intérieurs et extérieurs agissant sur ce sous système

c) <u>Eq. de Lagrange</u>

Supposons que $\Sigma = \bigcup_{j=1}^{p} S_j$ p solides S_j en mvt dans R_g. Ce mvt d'ens. est défini par n paramètres et t,

$q_i = q_i(t)$ dans l'espace des configurations de Σ. On définit le mvt en $M \to \overrightarrow{OM}(q_i, t)$ par : $\forall M \in \Sigma$,

$$\frac{d\overrightarrow{OM}}{dt} = \vec{V}(M) = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial \vec{M}}{\partial q_i} \dot{q}_i + \frac{\partial \vec{M}}{\partial t} \quad \text{dérivée totale}$$

◁ On définit alors μ^* à l'instant t fixé par

Déf. $\vec{V}^*(M) = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial \vec{M}}{\partial q_i} \dot{q}_i^*$ dire que $\frac{\partial \vec{M}}{\partial t}$ n'apparaît plus signifie que, pour μ^*, les obstacles mobiles sont figés à l'instant t dans la position réelle qu'ils occupent à cet instant. ▷

Cela correspond au fait que le mvt réel est un mvt virtuel comme si les liaisons ne dépendaient plus de t. On a la :

Proposition : le C.V.V $\vec{V}^*(M) = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial \vec{M}}{\partial q_i} \dot{q}_i^*$ rigidifie chaque solide S_j de Σ. (c'est le moins que l'on puisse lui demander !)

Preuve : soit A et M 2 points de S_j on a le torseur :

$\vec{V}(M) = \vec{V}(A) + \overrightarrow{MA} \wedge \vec{\omega}_j$. D'autre part en dérivant par rapport à $\dot{q}_i$ on a $\frac{\partial \vec{V}}{\partial \dot{q}_i}(M) = \frac{\partial \vec{M}}{\partial q_i}$ donc pour le torseur, en dérivant $\frac{\partial}{\partial \dot{q}_i}$, en $\times$ par $\dot{q}_i^*$ et en sommant on a :

$$\vec{V}^*(M) = \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{\partial \vec{V}}{\partial \dot{q}_i}(A) \dot{q}_i^* + \frac{\partial \vec{\omega}_j}{\partial \dot{q}_i} \dot{q}_i^* \wedge \overrightarrow{AM} \right).$$ Alors à condition

de poser $\vec{\omega}_j^* = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial \vec{\omega}_j}{\partial \dot{q}_i} \dot{q}_i^*$. (de même qu'on suppose

A et M ne dépendent pas des $\dot{q}_i$!)

que tout déplacement linéaire infiniment petit est une forme différentielle des paramètres de conf. q_i, de même tout déplacement angulaire infiniment petit est une forme diff. des q_i), et puisque pour tout point M on peut écrire que $\vec{V}^*(M) = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial \vec{V}(M)}{\partial \dot{q}_i} \dot{q}_i^*$, on reconnait dans la première somme $\vec{V}^*(A)$ et dans la 2e $\vec{\omega}_j^* \wedge \vec{AM}$

et a a $\vec{V}^*(M) = \vec{V}^*(A) + \vec{MA} \wedge \vec{\omega}_j^*$. L.P.E.F.D

Il est important dans le choix des mvts virtuels de tenir compte des liaisons puisque les mvts des solides dépendent justement de la nature de ces liaisons.

On montre qu'un CVV défini par p^* est compatible avec les liaisons si l'on a les relations suivantes :

* pour des liaisons holonomes $f_k(q, t) = 0$ on aura :

$$\sum_i \frac{\partial f_k}{\partial q_i} \dot{q}_i^* = 0$$

* pour des liaisons non holonomes $g_{ki}(q, t)\, \dot{q}_i = 0$ on aura

$$\sum_i g_{ki}(q, t)\, \dot{q}_i^* = 0.$$

<u>Déf</u> : une liaison dans un système Σ est dite parfaite ssi la puissance virtuelle des interefforts de liaison est nulle dans tout mvt virtuel compatible avec cette liaison.

Revenons alors au PPV, on explicite $\mathcal{P}^*$ grâce au

<u>Lemme</u> (formule cinématique de Lagrange).

$$\mathcal{A}^* = \iiint_\Sigma \left\{ \frac{d}{dt}\left[\frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial \dot{q}_i}\vec{V}(M)^2\right] - \frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial q_i}\vec{V}(M)^2 \right\} \underbrace{\dot{q}_i^* \rho(M)\, dv}_{\text{som}}.$$

<u>Preuve</u> à partir de $\mathcal{A}^*$ définie p 2b et $\vec{V}^*(M)$ p 5b on

a $\mathcal{A}^* = \iiint_\Sigma \vec{a}_{M/R_g} \underbrace{\frac{\partial \vec{M}}{\partial q_i}\dot{q}_i^*}_{\text{som}} \rho(M)\, dv$ or

$$\vec{a}_{M/R_g} = \frac{d}{dt}\vec{V}(M)_{/R_g} \quad \text{et} \quad \frac{\partial \vec{M}}{\partial q_i} = \frac{\partial \vec{V}(M)}{\partial \dot{q}_i} \quad \text{donc}$$

$$\vec{a}_{M/R_g}\frac{\partial \vec{M}}{\partial q_i} = \frac{d}{dt}\vec{V}(M)_{/R_g}\frac{\partial \vec{V}(M)}{\partial \dot{q}_i} \Longleftrightarrow$$

$$= \frac{d}{dt_{/R_g}}\left\{\vec{V}(M)\cdot\frac{\partial \vec{V}(M)}{\partial \dot{q}_i}\right\} - \vec{V}(M)\frac{d}{dt_{/R_g}}\left(\frac{\partial \vec{M}}{\partial q_i}\right). \text{ or}$$

$$d\left(\frac{\partial \vec{M}}{\partial q_i}\right) = \underbrace{\frac{\partial}{\partial q_j}\left(\frac{\partial \vec{M}}{\partial q_i}\right) dq_j}_{\text{som}} + \frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial \vec{M}}{\partial q_i}\right) dt \longrightarrow$$

$$\frac{d}{dt_{/R_g}}\left(\frac{\partial \vec{M}}{\partial q_i}\right) = \underbrace{\frac{\partial}{\partial q_j}\left(\frac{\partial \vec{M}}{\partial q_i}\right)\dot{q}_j}_{\text{som}} + \frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial \vec{M}}{\partial q_i}\right) \quad \text{appliquons le théo de Schwarz}$$

$$'' = \frac{\partial}{\partial q_i}\left[\underbrace{\frac{\partial \vec{M}}{\partial q_j}\dot{q}_j}_{\text{som}} + \frac{\partial \vec{M}}{\partial t}\right] = \frac{\partial}{\partial q_i}\vec{V}(M). \text{ Ainsi}$$

$$\vec{a}_{M/R_g}\frac{\partial \vec{M}}{\partial q_i} = \frac{d}{dt_{/R_g}}\left\{\frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial \dot{q}_i}\left(\vec{V}(M)\right)^2\right\} - \vec{V}(M)\frac{\partial}{\partial q_i}\vec{V}(M) \Longleftrightarrow$$

$$'' = \quad '' \quad -\frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial q_i}\left(V(M)\right)^2.$$

en reportant dans $\mathcal{A}^*$ on a L P E F $\triangleright$

Il me reste plus qu'à faire intervenir l'énergie vive.

$$2 K_{\Sigma/R_g} = \iiint_\Sigma \vec{V}(M)^2 \rho(M)\, dv$$ et on obtient :

$$\mathcal{A}^* = \left\{ \frac{d}{dt_{/R_g}} \left[\frac{\partial}{\partial \dot{q}_i} (K_{\Sigma/R_g}) \right] - \frac{\partial}{\partial q_i} (K_{\Sigma/R_g}) \right\} \underbrace{\dot{q}_i^*}_{som} =$$

$= \Psi_i \dot{q}_i^*{}_{/som}$ Ψ_i est le coef. de la puissance de la qté d'accélération relative à la coordonnée généralisée q_i

Or nous avons vu p 5^b que le CVV $\vec{V}^*(M)$ était rigidifiant sur chaque solide composant Σ. Autrement dit la puissance virtuelle des efforts intérieurs à chaque solide est nulle et ne subsistent que les efforts entre les solides et les efforts extérieurs donnés.

Nous récrivons donc le PPV sous la forme :

$\mathcal{A}^* = \mathcal{P}_l^* + \mathcal{P}_d^*$ et on admettra que l'on peut toujours mettre, pour chaque dérivée de coordonnée généralisée virt.,

$(\mathcal{P}_l^* + \mathcal{P}_d^*) = \underbrace{(\Pi_i + \Delta_i) \dot{q}_i^*}_{som}$ où les Π_i sont les coef. de puissances généralisées ou forces généralisée qui dérivent d'un pot. (conservatives) et Δ_i les forces généralisées dissipatives.

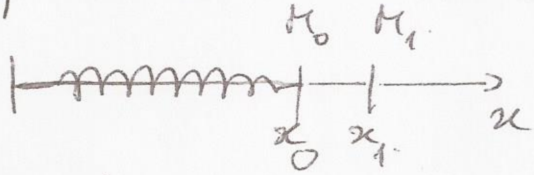
<u>Remarque</u> : nous avons vu que $\mathcal{P}^* = \iiint_\Sigma d\vec{F} \cdot \vec{V}^*(M) =$

$= \iiint_\Sigma \vec{f} \frac{\partial M}{\partial q_i} \dot{q}_i^* \, dv$ et on peut toujours poser :

Π_i ou $\Delta_i = \iiint_\Sigma \vec{f} \frac{\partial \vec{M}}{\partial q_i} dv$ en général les Π_i sont fonctions des q_i et t alors que Δ_i sont aussi fonction des $\dot{q}_i$.

On posera $\Pi_i = \dfrac{\partial U_f}{\partial q_i}$ où U_f est la f.f. relative à la distribution de force de densité (volumique) $\vec{f}$, et $U_f = -E_{pot}$

◁ **Ex 1**

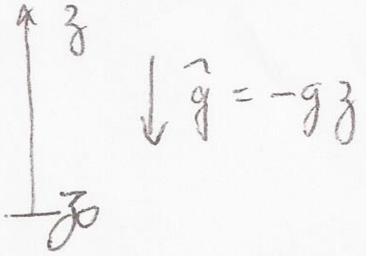


force de rappel $-kx$ qui s'exerce en M. Le travail élém. est $dW = -kx\,dx = -dE_{pot}$ où $E_{pot} = \frac{1}{2}kx^2 + cte$

on pose que E_{pot} à l'état non déformé ($M = M_0$) est nulle

$E_{pot}(x) = \frac{1}{2}kx^2 - \frac{1}{2}kx_0^2$. le travail de M_0 à M_1 est pour W fini : $\int_{x_0}^{x} -kx\,dx = \frac{1}{2}kx_0^2 - \frac{1}{2}kx^2$ et $\Pi_x = -kx$. ▷

◁ **Ex 2**



$\vec{g} = -g\vec{z}$: $dW = -gm\,dz = -dE_{pot}$ (<0 si $dz>0$)

$\Rightarrow E_{pot}(z) = -\int -mg\,dz$

$E_{pot}(z) = mgz + C$ et on pose que $E_{pot}(z_0) = 0$

$\Rightarrow C = -mgz_0$ le travail fini est $\int_{z_0}^{z} -mg\,dz = E_{pot}(z_0) - E_{pot}(z)$ et $\Pi_z = -mg$. ▷

Ainsi si le paramétrage est strict les q_i^* sont indép. et

on a : $\dfrac{d}{dt}\left[\dfrac{\partial}{\partial \dot{q}_i}\left(K_{\Sigma/R_g}\right)\right] - \dfrac{\partial}{\partial q_i}\left(K_{\Sigma/R_g}\right) = \dfrac{\partial}{\partial q_i}\left(-E_{pot}\right) + \Delta_i$

on en vient avec $\mathcal{L} = \mathcal{L}(q_i, \dot{q}_i, t) = K_{\Sigma/R_0} - E_{pot}$:

$$\boxed{\frac{d}{dt}\left[\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_i}\right] - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_i} = \Delta_i}$$