

Mercredi 3 octobre de l'an 2018

Siège de la SAF, 184.

Cours de Stéphane Mihajlovic

programme

2018/2019: Le calcul variationnel

I Outils mathématiques

II Equations de Lagrange

III Formalisme Hamiltonien

IV Applications

I Outils mathématiques préliminaires

1) Différentielle d'une fonction d'une variable réelle

Définition:

f est une fonction continue sur un intervalle ouvert I de $\mathbb{R}$

$x_0 \in I$, $f'(x_0)$ existe

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h} = f'(x_0)$$

On appelle différentielle de f en x_0
 df_{x_0} l'application linéaire:

$$df_{x_0} : h \mapsto df_{x_0}(h) = f'(x_0) \times h$$

linéarité:

$$\begin{aligned} \cdot df_{x_0}(h_1 + h_2) &= f'(x_0)(h_1 + h_2) = f'(x_0) \times h_1 \\ &\quad + f'(x_0) \times h_2 \\ &= df_{x_0}(h_1) + df_{x_0}(h_2) \end{aligned}$$

$$\cdot df_{x_0}(\lambda h) = \lambda \times df_{x_0}(h)$$

Définition:

On dit f est différentiable en x_0 s'il
existe df_{x_0} et une fonction ε_{x_0}
telle que: $\lim_{h \rightarrow 0} \varepsilon_{x_0}(h) = 0$

de sorte que:

$$f(x_0 + h) = f(x_0) + df_{x_0}(h) + h \varepsilon_{x_0}(h)$$

$$f(x_0 + h) - f(x_0) = df_{x_0}(h) + h \varepsilon_{x_0}(h)$$

variation au 1^{er} ordre de f à partir de x_0

Exemple:

$$f(x) = x^n$$

$$f(x+h) = (x+h)^n$$

$$\frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \frac{(x+h)^n - x^n}{h}$$

$$= \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} h^k x^{n-k} - x^n$$

$$= \cancel{x^n} + n h x^{n-1} + \frac{n(n-1)}{2} h^2 x^{n-2} + \frac{n(n-1)(n-2)}{3!} x^{n-3} h^3 + \dots + \frac{h^n - \cancel{x^n}}{h}$$

$$= n x^{n-1} + \frac{n(n-1)}{2} h x^{n-2} + \dots + h^{n-1}$$

$$\Rightarrow \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = n x^{n-1} = f'(x)$$

$$f(x+h) = f(x) + \underbrace{n x^{n-1} \times h}_{df_x(h)} + \underbrace{\frac{n(n-1)}{2} h^2 x^{n-2} + \dots + h^n}_{h \varepsilon_x(h)}$$

Exemple 2:

Identité $\text{Id}: x \mapsto \text{Id}(x) = x$

$$d\text{Id}_{x_0}(h) = 1 \cdot h$$

On note $d\text{Id}_{x_0} = dx$

$$df_{x_0}(h) = f'(x_0) \cdot h = f'(x_0) dx(h) \quad \forall h$$

$$df_{x_0} = f'(x_0) dx$$

on écrit par abus :

$$\frac{df_{x_0}}{dx} = f'(x_0)$$

• Composition :

$$d(g \circ f)_{x_0} = dg_{f(x_0)} \times df_{x_0}$$

$$y = f(x) \quad y = g \circ f(x) = g[f(x)] = g(y)$$

$$\text{On a : } \frac{dy}{dx} = (g \circ f)'(x) = g'(y) \times f'(x)$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{df} \times \frac{df}{dx}$$

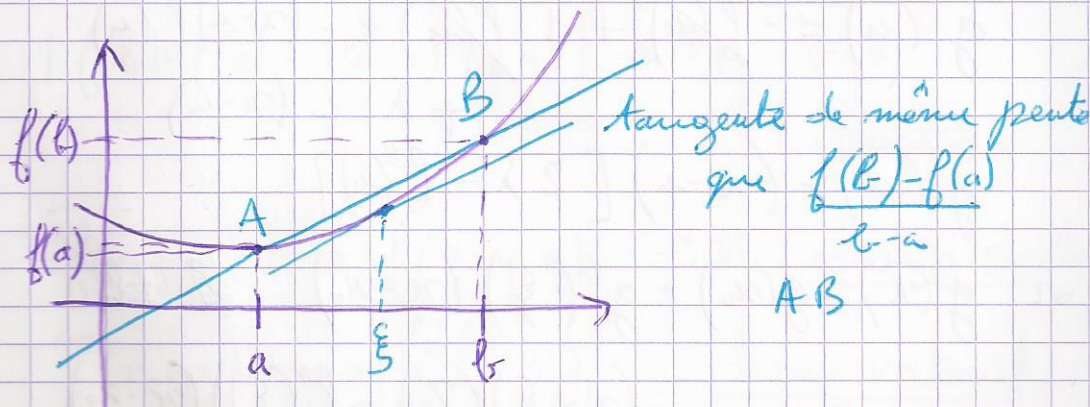
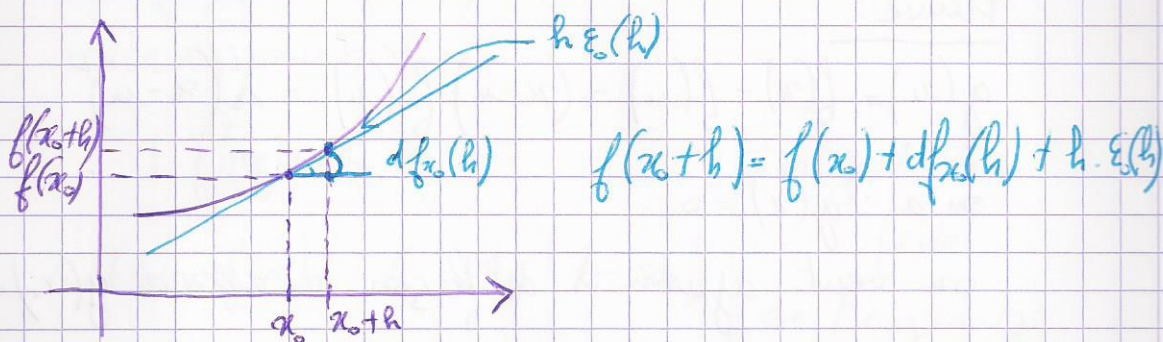
Théorème des accroissements finis:

f dérivable et continue sur I

$$\forall]a, b[\subset I \quad f(b) - f(a) = ?$$

il existe une valeur $\xi \in]a, b[$ tel que

$$f(b) - f(a) = f'(\xi)(b - a)$$



Théorème de la 2^{ème} variation:

f continue et 2 fois dérivable sur I contenant x_0 et x , alors il existe

$\xi \in]x_0, x[$ ou $]x, x_0[$ tel que

$$f(x) - f(x_0) = (x - x_0) f'(x_0) + \frac{1}{2} (x - x_0)^2 f''(\xi)$$

Preuve:

$$g(u) = f(x) - f(u) - (x - u) f'(u) - \lambda (x - u)^2$$

$$\text{on a : } g(x) = 0.$$

on veut ajuster λ de façon à assurer $g(x_0) = 0$.

$$g'(u) = -\cancel{f'(u)} + 1 \cdot \cancel{f'(u)} - (x - u) f''(u) + \lambda \cdot 2(x - u)$$

$$g'(u) = (x - u) [2\lambda - f''(u)]$$

$$\text{or } g(x) - g(x_0) = g'(\xi) (x - x_0) \quad \text{th.}$$

$$\begin{aligned} 0 &= (x - \xi) (2\lambda - f''(\xi)) (x - x_0) \\ \Rightarrow \lambda &= f''(\xi) + \frac{1}{2} \end{aligned}$$

$$\text{et } g(x_0) = f(x) - f(x_0) - (x - x_0) f'(x_0) - \frac{1}{2} (x - x_0)^2 f''(\xi)$$

$$f(x) = f(x_0) + (x-x_0)f'(x_0) + \frac{1}{2}f''(\xi)(x-x_0)^2$$

L P E F
(la preuve est faite)

Remarque 1:

- Souvent on ne connaît qu'un majorant de $f'(x)$ ou $f''(x)$ et on a l'inégalité des accroissements finis:

$$|f'(x)| \leq M$$

$$|f(b) - f(a)| \leq M |b - a|$$

Inégalité des
acc. finis
de Lagrange.

$$|f(b) - f(a) - (b-a)f'(a)| \leq M_2 (b-a)^2$$

2^{ème} variabilité -

• $f(x, y, z) \mapsto f(x, y, z) \in \mathbb{R}$: champ scalaire
 $\vec{f}(x, y, z) \mapsto \begin{pmatrix} f_x(x, y, z) \\ f_y(x, y, z) \\ f_z(x, y, z) \end{pmatrix}$: champ vectoriel

Autre notation: $\xi = x_0 + \underbrace{\theta(x-x_0)}_h$ $\theta \in [0, 1]$

$$\xi = x_0 + \theta(x-x_0)$$

Soit f une fonction bijective de $\mathbb{I}$ sur $f(\mathbb{I})$ et dérivable sur $\mathbb{I}$.

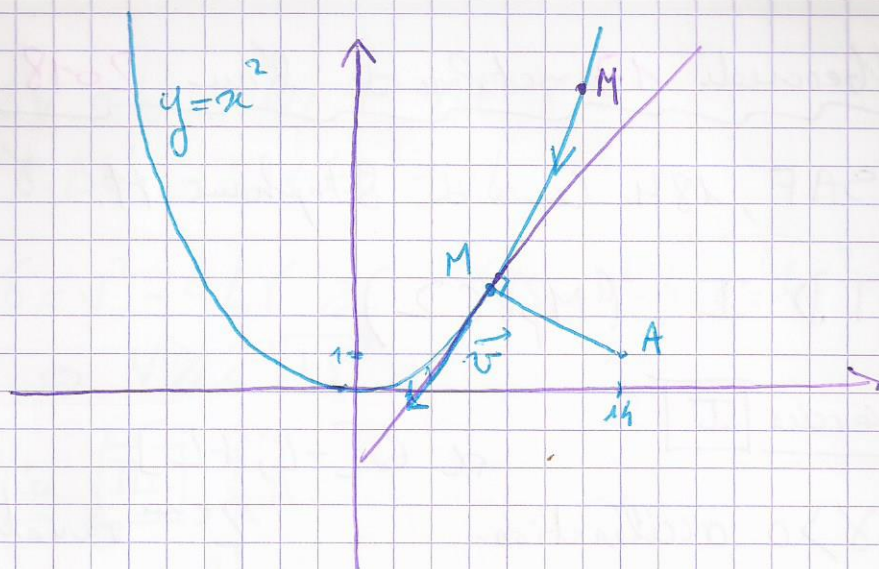
$$y = f(x) \quad f^{-1}(y) = x$$

$$\frac{dx}{dy} = (f^{-1})'(y) = \frac{1}{f'[f^{-1}(y)]} = \frac{1}{f'(x)} = \frac{1}{\frac{dy}{dx}}$$

Exercice II TD I (MplC2)

Une particule M arrive depuis l'infini selon une trajectoire parabolique $y = x^2$ dans $(0, x, y)$.

Déterminer le minimum de la distance entre M et $A(14, 1)$.



$$d(M, A)$$

$$t \mapsto M(t) = (t, t^2)$$

$$\text{ou } x \mapsto M(x) = (x, x^2)$$

$$\vec{AM} \cdot \vec{v}_M(t) = 0$$

$\vec{v}_M$ vecteur vitesse

$$\vec{OM} \begin{pmatrix} x \\ x^2 \end{pmatrix} \Rightarrow \vec{v}_M \begin{pmatrix} 1 \\ 2x \end{pmatrix} \quad \vec{AM} \begin{pmatrix} x-14 \\ x^2-1 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow (x-14) + 2x(x^2-1) = 0$$

$$(x-14) + 2x(x^2-1) = 0$$

$$\Rightarrow 2x^3 - x - 14 = 0$$

une racine réelle : $x = 2$.

$$M(2, 4)$$