

② Différentielle d'une fonction de $\mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^p$

Espace vectoriel de Banach
(normé et suite de Cauchy
converge
(normé et complet))

$$f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^p$$

$$\vec{x} = (x_1, \dots, x_n) \mapsto (f_1, \dots, f_p) = f(\vec{x})$$

$j \in \{1, \dots, p\}$ on étudie $f_j(\vec{x})$ que l'on suppose définie sur un domaine $U \subset \mathbb{R}^n$ au voisinage de $\vec{x}_0 \in U$

Définition :

f_j est diff. en $\vec{x}_0$ si il existe n nombres

$a_1, \dots, a_n$ tel que

$$\forall \vec{h} \in \mathbb{R}^n \text{ et } \vec{x}_0 + \vec{h} \in U,$$

$$\text{on a : } f_j(\vec{x}_0 + \vec{h}) = f_j(\vec{x}_0) + \sum_{i=1}^n a_i h_i + \varepsilon(\vec{x}_0, \vec{h}) \times \|\vec{h}\|$$

$$\text{avec } \lim_{\vec{h} \rightarrow 0} \varepsilon = 0$$

l'application linéaire $\mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$
 $h \mapsto \sum_i a_i h_i$ s'appelle la différentielle
 de f_j en $\vec{x}_0$ et se note $df_{j,\vec{x}_0}$

et on a $df_{j,\vec{x}_0}(h) = \sum_i a_i h_i$

On dit que f_j est dérivable en x_0
 s'il existe n nbres $\frac{\partial f_j}{\partial x_i} = \lim_{h_i \rightarrow 0} \frac{f_j(x_1, x_2, \dots, x_{i-1}, x_i + h_i, x_{i+1}, \dots, x_n) - f_j(x_1, x_2, \dots, x_{i-1}, x_i, x_{i+1}, \dots, x_n)}{h_i}$

$$\frac{\partial f_j}{\partial x_i} = \lim_{h_i \rightarrow 0} \frac{f_j(x_1, x_2, \dots, x_{i-1}, x_i + h_i, x_{i+1}, \dots, x_n) - f_j(x_1, x_2, \dots, x_{i-1}, x_i, x_{i+1}, \dots, x_n)}{h_i}$$

Théorème 1 : condition nécessaire

si f_j est diff. en $\vec{x}_0$ alors

$$\begin{cases} f_j \text{ est continue en } \vec{x}_0 \\ a_i = \frac{\partial f_j}{\partial x_i} \text{ en } \vec{x}_0 \end{cases}$$

Preuve :

$$f_j(\vec{x}_0 + h) = f_j(\vec{x}_0) + \sum_i a_i h_i + \|h\| \varepsilon(\vec{x}_0, h)$$

$$\lim_{\vec{h} \rightarrow \vec{0}} f_j(\vec{x}_0 + \vec{h}) = f_j(\vec{x}_0)$$



prenons $\vec{h} = (0, \dots, 0, h_i, 0, \dots, 0)$

$$f_j(\vec{x}_0 + \vec{h}) = f_j(\vec{x}_0) + a_i h_i + |h_i| \cdot \varepsilon(\vec{x}_0, h)$$

$$\frac{f_j(\vec{x}_0 + \vec{h}) - f_j(\vec{x}_0)}{h_i} = a_i \pm \varepsilon(\vec{x}_0, h)$$

et en passant à la limite lorsque $h_i \rightarrow 0$

on a bien :

$$\left. \frac{\partial f_j}{\partial x_i} \right|_{\vec{x}_0} = a_i \Big|_{\vec{x}_0}$$

Réciproque : condition suffisante :
 pour que f_j soit diff. en $\vec{x}_0$ il
 suffit que les n dérivées partielles
soient continues en ce point $\vec{x}_0$.

Remarque 1 : on interprète $dx_i : \mathcal{H} \rightarrow dx_i(\vec{h})$
 $= h_i$
 ième projection de $\vec{h}$

$$df_j, \vec{x}_0(\vec{h}) =$$

$$= \sum_i \underbrace{\frac{\partial f_j}{\partial x_i} \Big|_{\vec{x}_0}}_{a_i} \underbrace{dx_i(\vec{h})}_{h_i}$$

$$df_j(\vec{x}) = \sum_i \frac{\partial f_j}{\partial x_i} \Big|_{\vec{x}_0} dx_i$$

→ différentielle totale de f_j

Remarque 2 :

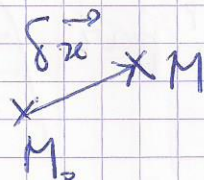
$$\vec{OM} = \vec{x}$$

$$\vec{OM}_0 = \vec{x}_0$$

$\vec{x}$ est tel que $M_0 \rightarrow M$ $\vec{x} = \vec{x}_0 + \vec{h}$

$\vec{h}$: déplacement du point M noté $\delta \vec{x}$

$$f_j(\vec{x}) - f_j(\vec{x}_0) = \delta f_j$$



$$= \vec{\text{grad}} f_j, \vec{x} \cdot \delta \vec{x}$$

$$\text{où } \vec{\text{grad}} f_j = \left(\frac{\partial f_j}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial f_j}{\partial x_n} \right)$$

(c'est un
coefficient!)

gradient de f_j

$$\delta \vec{x} = \begin{pmatrix} x_1 - x_{10} \\ x_2 - x_{20} \\ \dots \\ x_n - x_{n0} \end{pmatrix}$$

Passage à la limite :

$$\delta \rightarrow d$$

(Cours de Gérard Taillet)
Fourmies, Grenoble

Remarque 3 : la confusion est achevée si on identifie $\delta \vec{x}$ avec $\begin{pmatrix} dx_1 \\ \vdots \\ dx_n \end{pmatrix}$

• Définition : la différentielle de $f = (f_1, \dots, f_p)$ en $\vec{x}_0$ est l'application linéaire représentée dans la base canonique de $\mathbb{R}^p$ par

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n} \\ \frac{\partial f_p}{\partial x_1} & \frac{\partial f_p}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial f_p}{\partial x_n} \end{pmatrix} = (J_f)_{\vec{x}_0}$$

→ matrice jacobienne de f en $\vec{x}_0$

• Remarque : si chaque f_j est une nouvelle coordonnée y_j alors on peut interpréter $(J_f)_{\vec{x}_0}$ comme la matrice de changement de coordonnées d'un vecteur

$d\vec{M}(x_1, \dots, x_m)$ en $d\vec{M}'(y_1, \dots, y_r)$

$$d\vec{M}' = (J_f)_{\vec{x}_0} d\vec{M}$$

$$dy^j = \frac{\partial y^j}{\partial x^i} dx^i$$

← covariant

← covariant

Mercrèdi 7 novembre de l'an 2018

SAF, rue Beethoven, 18H.

Cours de math, Stéphanie Mihajlovic

1) $df_{x_0}: h \mapsto df_{x_0}(h) = f'(x_0) \cdot h. \quad \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}.$

2) $df_{x_0}: \vec{h} \mapsto df_{x_0}(\vec{h}) = \vec{\text{grad}}_{\vec{x}_0} f \cdot \vec{h} \quad \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}.$

le grad est une forme
linéaire

3) $\mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^p$

$df_{x_0}: \vec{h} \mapsto df_{x_0} = (J_f)_{\vec{x}_0}$

matrice jacobienne

$$2/ \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$$

$E = \mathbb{R}^n$ e.v. de départ

$$df_{\vec{x}_0} \in \mathcal{L}(E, \mathbb{R})$$

autre notation : $D^2 f_{\vec{x}_0} = \vec{f}''(\vec{x}_0)$

dérivée seconde :

$$f''_{\vec{x}_0} : E \rightarrow \mathcal{L}(E, \mathcal{L}(E, \mathbb{R})) = \mathcal{L}(\underbrace{(E, E)}_{= E^*}, \mathbb{R})$$

est isométrique

à ...

→ matrice Hessienne
Hessienne

pour simplifier
les notations

$$f'_{\vec{x}_0} : \vec{q} \mapsto \vec{q} \cdot \vec{x}_0$$

matrice colonne
ligne

$$(H_f)_{\vec{x}_0} = \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 f}{(\partial x^1)^2} & \frac{\partial^2 f}{\partial x^2 \partial x^1} & \dots & \frac{\partial^2 f}{\partial x^n \partial x^1} \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x^1 \partial x^2} & \frac{\partial^2 f}{(\partial x^2)^2} & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x^1 \partial x^n} & \dots & \dots & \frac{\partial^2 f}{(\partial x^n)^2} \end{pmatrix}$$

$\partial x^1 \partial x^1 \rightarrow$

Théorème de Schwarz: $\frac{\partial^2 f}{\partial x^i \partial x^j} = \frac{\partial^2 f}{\partial x^j \partial x^i}$

th. de Schwarz vérifié $\Rightarrow H$ est symétrique

Dérivée troisième:

$$\begin{aligned} f'''_{\vec{x}_0} : E &\rightarrow \mathcal{L}(E, \mathcal{L}(E, \mathcal{L}(E, \mathbb{R}))) \\ &= \mathcal{L}(E, E, E, \mathbb{R}) \text{ (est isométrique à)} \\ \vec{h}, \vec{k} &\mapsto {}^t \vec{h} (H_f)_{\vec{x}_0} \vec{k} \quad (\text{dérivée seconde}) \end{aligned}$$

$\mathcal{L}(E, \mathbb{R}) = E^*$ espace dual
il est isométrique à E .

On simplifie les notations car les espaces sont isométriques. (on le montre)

La dérivée n -ième de f sur $\vec{x}_0$ sera notée

$$\vec{f}^{(n)}(\vec{x}_0) = D^n f(\vec{x}_0)$$

c'est une application de $\mathcal{L}(E^n, F)$

dans $\mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^p$

$$1) d(\vec{f} \circ \vec{g})_{\vec{x}} = d\vec{f}_{\vec{g}(\vec{x})} \circ d\vec{g}_{\vec{x}}$$

$$\Rightarrow (J_{\vec{f} \circ \vec{g}})_{\vec{x}} = (J_{\vec{f}})_{\vec{g}(\vec{x})} \times (J_{\vec{g}})_{\vec{x}}$$

$$2) d\vec{f}_{\vec{g}(\vec{x})}^{-1} = (d\vec{f}_{\vec{x}})^{-1}$$

notation différentielle.
Théorème :

soit $\vec{f} : U \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$

U : ouvert ici $n=p$

$\vec{x}_0 \in U$

$\vec{f} \in \mathcal{C}_U^k$ est régulier en $\vec{x}_0$

($\mathcal{C}_U^k$: fonction de classe $\mathcal{C}^k$, k fois
dérivable.)

$$\det (J_{\vec{f}})_{\vec{x}_0} \neq 0$$

alors il existe $V_{\vec{x}_0}$ voisinage de $\vec{x}_0$
tel que la restriction de $\vec{f}$ à
 $V_{\vec{x}_0}$ est bijective de $V_{\vec{x}_0} \rightarrow V_{\vec{y}_0}$

avec $f^{-1}(\vec{y}_0) = \vec{x}_0$, $f^{-1} \in \mathcal{C}^h_{\vec{x}_0}$ et

on a
$$\left(J_{f^{-1}} \right)_{\vec{y}_0} = \left(J_f \right)_{\vec{x}_0}^{-1}$$

notation matricielle

③ Théorème de la 2^{ème} variation

pour f de $\mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^p$

(Vocabulaire

mathématiques :

- axiome ou postulats

- théorème ou proposition

- lemme = théorème préparatoire
d'un autre théorème.

- corollaire : petit théorème déduit
d'un théorème principal.

Le théorème des acc. finis ne s'applique
pas.

Exemple : $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$

$$t \mapsto f(t) = \begin{pmatrix} f_1(t) = 2 \sin t \\ f_2(t) = -\cos t \end{pmatrix}$$

$$\vec{f}(t) = \begin{pmatrix} 2 \cos t \\ \sin t \end{pmatrix}$$

$$(\vec{f})_{t_0} = \begin{pmatrix} 2 \cos t_0 \\ \sin t_0 \end{pmatrix}$$

$$\vec{f}(2\pi) = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad \vec{f}(0) = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix}$$

accroissement finis ~~en~~ $\rightarrow$ ne fonctionne pas dans $\mathbb{R}^2$ ni $\mathbb{R}^n$

$$\vec{f}(2\pi) - \vec{f}(0) = \vec{0}$$

$$1D : f(2\pi) - f(0) = \int_0^{2\pi} f'(c) (2\pi - 0) \quad c \in]0; 2\pi[$$

$$\checkmark (\vec{f}) = \begin{pmatrix} 2 \cos t_0 \\ \sin t_0 \end{pmatrix} \times 2\pi \neq \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix}$$

problème!
en 2D.
 $\mathbb{R}^2$

Lemme 1 : soit $f: [0,1] \rightarrow \mathbb{R}^n$ et $g: [0,1] \rightarrow \mathbb{R}$
 continu^{es} sur $[0,1]$, dérivable sur $]0,1[$
 telle que $\|f'(t)\| \leq g'(t)$ supposées positive
 positive

Alors : $\|f(1) - f(0)\| \leq \underbrace{g(1) - g(0)}_{>0}$

Lemme 2

$f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^p \in \mathcal{C}_u^{n+1}$

U ouvert de $\mathbb{R}^n$

$\vec{x} \in \mathbb{R}^n$, I intervalle ouvert de $\mathbb{R}$

tel que si $\theta \in I$, $\vec{x}_0 + \theta \vec{h} \in U$

alors l'application

$\vec{\varphi}: I \rightarrow \mathbb{R}^p$ définie par

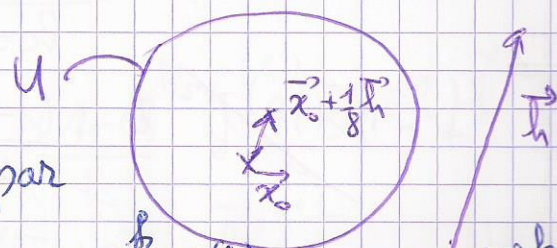
$$\vec{\varphi}(\theta) = f(\vec{x}_0 + \theta \vec{h}) + \sum_{k=1}^n \frac{(1-\theta)^k}{k!} f^{(k)}(\vec{x}_0 + \theta \vec{h}) \cdot \frac{\vec{h}^k}{h^k}$$

$E \times F$
 $\vec{h}_1 \times \vec{h}_n$

13

$\mathcal{L}(E_1, \dots, E_n, \mathbb{R}^p)$
 $\underbrace{\quad}_{k \text{ fois}}$

produit
 cartésien
 ou
 tensor
 $(\vec{h})^k$



est dérivable et a pour dérivée :

$$\boxed{\vec{\Psi}'(\theta) = \frac{(1-\theta)^n}{n!} f^{(n+1)}(\vec{x}_0 + \theta \vec{h}) \vec{h}^{n+1}}$$

On a : $\vec{\Psi}'(\theta) = \vec{f}'(\vec{x}_0 + \theta \vec{h}) \cdot \vec{h}$

$$+ \sum_{k=1}^n \frac{(1-\theta)^{k-1}}{(k-1)!} f^{(k)}(\vec{x}_0 + \theta \vec{h}) \cdot \vec{h}$$

$$(uv)' = u'v + uv'$$

$$+ \frac{(1-\theta)^k}{k!} f^{(k+1)}(\vec{x}_0 + \theta \vec{h}) \underbrace{\vec{h}^k \cdot \vec{h}}_{\vec{h}^{k+1}}$$

$$\rightarrow \cancel{f'(\vec{x}_0) \cdot \vec{h}} + (-1) \cancel{f'(\vec{x}_0) \cdot \vec{h}} + \frac{1-\theta}{1} \cancel{f^{(2)}(\vec{x}_0) \cdot \vec{h}^2}$$

$k=1$

$$+ (-1) \frac{(1-\theta)}{1} \cancel{f^{(2)}(\vec{x}_0) \cdot \vec{h}^2} + \frac{(1-\theta)^2}{2!} \cancel{f^{(3)}(\vec{x}_0) \cdot \vec{h}^3}$$

$$+ (-1) \frac{(1-\theta)^{n-1}}{(n-1)!} \cancel{f^{(n)}(\vec{x}_0) \cdot \vec{h}^n} + \frac{(1-\theta)^n}{n!} f^{(n+1)}(\vec{x}_0 + \theta \vec{h}) \vec{h}^{n+1}$$

(John von Neumann)
disait...

Théorème : soit $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^p$ de classe $\mathcal{C}_n^{n+1}$,
 $u \in \mathbb{R}^n$
 $x_0 \in \mathbb{R}^n$ tel que $[x_0, x_0 + \vec{h}] \subset U$
 alors on a :

$$\| f(x_0 + \vec{h}) - f(x_0) - \sum_{k=1}^n \frac{1}{k!} f^{(k)}(x_0) \vec{h}^k \| \leq$$

$$\frac{\| \vec{h} \|_E^{n+1}}{(n+1)!} \times \sup_{\theta \in [0;1]} \| f^{(n+1)}(x_0 + \theta \vec{h}) \|_F$$

(l'inégalité de Taylor-Lagrange) -

Démonstration :

$$\begin{aligned} \vec{\psi}(\theta) &= f(x_0 + \theta \vec{h}) + \sum_{k=1}^n \frac{(1-\theta)^k}{k!} f^{(k)}(x_0 + \theta \vec{h}) \vec{h}^k \\ \vec{\psi}'(\theta) &= \frac{(1-\theta)^n}{n!} f^{(n+1)}(x_0 + \theta \vec{h}) \cdot \vec{h}^{n+1} \end{aligned}$$

$$\|\vec{\Psi}'(\theta)\| \leq \frac{(1-\theta)^n}{n!} \sup_{\theta \in [0,1]} \left\| \vec{f}^{(n+1)}(\vec{x}_0 + \theta \vec{h}) \right\| \|\vec{x}\| \|\vec{h}\|^{n+1}$$

$$g'(u) = \frac{(1-u)^n}{n!} \sup_{\theta \in [0,1]} \left\| \vec{f}^{(n+1)}(\vec{x}_0 + \theta \vec{h}) \right\| \|\vec{x}\| \|\vec{h}\|^{n+1}$$

$u \in]0, 1[$, on a $g'(u) > 0$; on applique le lemme 1 :

$$\begin{aligned} \|\Psi(1) - \Psi(0)\| &\leq g(1) - g(0) = \int_0^1 g'(u) du \\ &= \sup_{\theta \in [0,1]} \left\| \vec{f}^{(n+1)}(\vec{x}_0 + \theta \vec{h}) \right\| \|\vec{x}\| \|\vec{h}\|^{n+1} \\ &\quad \times \int_0^1 \frac{(1-u)^n}{n!} du \\ &= \left[\frac{-1}{(n+1)!} (1-u)^{n+1} \right]_0^1 \\ &= \frac{1}{(n+1)!} \end{aligned}$$

$$\|\Psi(1) - \Psi(0)\| = \left\| f(\vec{x}_0 + \theta \vec{h}) - f(\vec{x}_0) \right\| = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k!} \left\| \vec{f}^{(k)}(\vec{x}_0) \right\| \|\vec{h}\|^k$$

- dans $\mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$

$$\left\| f(\vec{x}_0 + \theta \vec{h}) - f(\vec{x}_0) - g(\vec{h}) \right\| = \left\| \vec{f} - \frac{1}{2} \vec{h}^T (H) \vec{h} \right\| \leq \dots$$

$$\begin{aligned}
 f(\vec{x}_0 + \theta \vec{h}) &= f(\vec{x}_0) + \text{grad} f \cdot \vec{h} + \frac{1}{2} \vec{h}^T (H_f)_{\vec{x}_0} \vec{h} \\
 &\quad + \frac{\|\vec{h}\|^3}{3!} \sup_{\theta \in [0,1]} \|f^{(3)}(\vec{x}_0 + \theta \vec{h})\|
 \end{aligned}$$

Exercice IV à faire.

puissance cours 21/11

