

l'énergie cinétique généralisée), on obtient donc finalement:

$$H = \sum_i \left(2 \sum_j M_{ij} \dot{q}^j \right) \dot{q}^i - K + E_{\text{pot}} = 2K - K + E_{\text{pot}}$$

$\Rightarrow H = K + E_{\text{pot}}$. C'est bien l'énergie totale et c'est précisément pour cela que L a défini H par $\sum_i p_i \dot{q}^i - L$ et pas l'inverse comme cela est apparu en III 5) Δ

∇ Exemple basique: oscillateur harmonique linéaire unidirectionnel.

nd: $K = \frac{1}{2} m \dot{x}^2$ (x déplacement à partir de la position d'équilibre statique) et $E_{\text{pot}} = \frac{1}{2} k x^2 \Rightarrow$

$$L = K - E_{\text{pot}} = \frac{1}{2} m \dot{x}^2 - \frac{1}{2} k x^2. \text{ Appliquons la def:}$$

$$p_x = \frac{\partial L}{\partial \dot{x}} = m \dot{x} \text{ et } H = p_x \dot{x} - L \Leftrightarrow$$

$$H = \frac{1}{2m} p_x^2 + \frac{1}{2} k x^2 = K + E_{\text{pot}}. \text{ Avec les éq. canoniques:}$$

$$\dot{x} = \frac{\partial H}{\partial p_x} = \frac{1}{m} p_x \text{ et } \dot{p}_x = - \frac{\partial H}{\partial x} = -kx, \text{ on peut tirer}$$

$$(\text{de la 1ère}) \quad \ddot{x} = \frac{1}{m} \dot{p}_x = \frac{1}{m} (-kx) \Leftrightarrow m \ddot{x} + kx = 0 \Delta$$

b) Obtenir à partir d'un principe variationnel:

La variable première de l'action en II n:

$$\delta S = \left[\sum_i \frac{\partial L}{\partial \dot{q}^i} \delta q^i \right]_{t_0}^{t_1} - \int_{t_0}^{t_1} \sum_i \left(\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}^i} \right) - \frac{\partial L}{\partial q^i} \right) \delta q^i dt$$

nous donne dans le cas où nous n'imposons plus aux trajectoires
varrées d'arriver toutes au même point (donc avec $\delta q^i(t_1) = 0$) mais
à des points voisins $q^i(t) + \delta q^i(t)$ et pas nécessairement au
même instant t , mais toujours pour des mots réels alors la 1^{re} var.

$$\text{et : } \delta S = \sum_i \frac{\partial L}{\partial \dot{q}^i} \delta q^i - \int_{t_0}^t \sum_i \left[\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}^i} \right) - \frac{\partial L}{\partial q^i} \right] \delta q^i dt \text{ et se}$$

réduit à $\delta S = \sum_i p_i \delta q^i$ puisque les mots sont réels.

Par conséquent la variation étant infinitésimale ceci entraîne

que $\frac{\partial S}{\partial q^i} = p_i$. Nous avons considéré la fonctionnelle dépendant
du temps :

$$S = \int_{t_0}^t L(q^i, \dot{q}^i, \tau) d\tau \text{ qui entraîne évidemment que}$$

$\frac{dS}{dt} = L$. Mais si on considère S comme fonction seulement des
coordonnées et du temps $S = S(q^i, t)$ alors sa dérivée totale :

$$\frac{dS}{dt} = \frac{\partial S}{\partial t} + \sum_i \frac{\partial S}{\partial q^i} \dot{q}^i = \frac{\partial S}{\partial t} + \sum_i p_i \dot{q}^i \Rightarrow$$

$$\frac{\partial S}{\partial t} = \frac{dS}{dt} - \sum_i p_i \dot{q}^i \Rightarrow \frac{\partial S}{\partial t} = L - \sum_i p_i \dot{q}^i = -H.$$

de sorte que la diff. totale de l'action comme seule fonction des

coordonnées et du temps est $dS = \sum_i p_i dq^i - H dt$ et

$$S = \int_{t_0}^t \left(\sum_i p_i dq^i - H d\tau \right) = \int_{t_0}^t \left(\sum_i p_i \dot{q}^i - H \right) d\tau$$

Le principe de moindre action sous la forme de

Hamilton-Jacobi s'écrit donc $\delta S = 0$ et cela légitimise la déf. de H par $\sum_i p_i \dot{q}^i - L$.

◁ Plaçons nous dans l'espace des phases en utilisant un paramétrage arbitraire $u \leftrightarrow t$ de sorte que $q^i = q^i(u)$, $p_i = p_i(u)$, avec $p_i = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}^i}$. Un mot réel de $A \approx B$ est caractérisé par les valeurs u_A, u_B de u , et l'action de H.J. :

$S = \int_{u_A}^{u_B} \left[\sum_i p_i \frac{dq^i}{du} - H \frac{dt}{du} \right] du$ minimale. Nous introduisons un paramètre v permettant d'obtenir une classe de mots variés

avec origine et arrivée des trajectoires dans l'espace des phases, variables : tout point représentatif de

cet espace est pour tout $u \in [u_A, u_B]$ fixé

situé sur une courbe $u = \text{cte}$ paramétrée

par v . On passe donc de $P(u, v)$ à

$P'(u, v + \delta v)$ c'est à dire qu'un mot voisin de la trajectoire

$\widehat{AB}_v$ est $\widehat{A'B'}_{v+\delta v}$ défini pour une variation de δv de v seulement.

Il convient, par principe, de distinguer l'évolution de S (la valeur de l'intégrale) liée à la variation de u et la variation de S (au sens variationnel) liée à la variation de v : δv . Considérons donc $S = S(v)$

et dérivons par rapport au paramètre v :

$$\frac{dS}{dv} = \int_{u_A}^{u_B} \left\{ \sum_i \frac{\partial p_i}{\partial v} \frac{dq^i}{du} + p_i \frac{\partial}{\partial u} \left(\frac{dq^i}{dv} \right) - \frac{\partial H}{\partial v} \frac{dt}{du} - H \frac{\partial}{\partial u} \left(\frac{dt}{dv} \right) \right\} du$$

On IPP le second et le dernier terme :

$$\int_{\mu_A}^{\mu_B} p_i \frac{\partial}{\partial \mu} \left(\frac{\partial q^i}{\partial v} \right) d\mu = \left[p_i \frac{\partial q^i}{\partial v} \right]_{\mu_A}^{\mu_B} - \int_{\mu_A}^{\mu_B} \frac{\partial p_i}{\partial \mu} \frac{\partial q^i}{\partial v} d\mu$$

$$\int_{\mu_A}^{\mu_B} H \frac{\partial}{\partial \mu} \left(\frac{\partial t}{\partial v} \right) d\mu = \left[H \frac{\partial t}{\partial v} \right]_{\mu_A}^{\mu_B} - \int_{\mu_A}^{\mu_B} \frac{\partial H}{\partial \mu} \frac{\partial t}{\partial v} d\mu \text{ d'où en reportant :}$$

$$\frac{dS}{dv} = \left[p_i \frac{\partial q^i}{\partial v} - H \frac{\partial t}{\partial v} \right]_{\mu_A}^{\mu_B} + \int_{\mu_A}^{\mu_B} \left(\sum_i \frac{\partial p_i}{\partial \mu} \frac{\partial q^i}{\partial v} - \frac{\partial p_i}{\partial \mu} \frac{\partial q^i}{\partial v} \right) d\mu +$$

$$+ \int_{\mu_A}^{\mu_B} \left(\frac{\partial H}{\partial \mu} \frac{\partial t}{\partial v} - \frac{\partial H}{\partial v} \frac{\partial t}{\partial \mu} \right) d\mu \text{ en notant par } S \text{ les variables par rapport}$$

au paramètre v on a donc :

$$\delta S = \left[p_i \delta q^i - H \delta t \right]_{\mu_A}^{\mu_B} + \int_{\mu_A}^{\mu_B} \left[\left(\sum_i \delta p_i dq^i - dp_i \delta q^i \right) + (dH \delta t - dt \delta H) \right]$$

Aux bornes $\delta q^i = 0$ et $\delta t = 0 \Rightarrow$

$$\delta S = \int_{\mu_A}^{\mu_B} \left[\left(\sum_i \delta p_i dq^i - dp_i \delta q^i \right) + (dH \delta t - dt \delta H) \right]$$

Mais la fonction de Hamilton admet la variation infinitésimale :

$$\delta H = \frac{\partial H}{\partial p_i} \delta p_i + \frac{\partial H}{\partial q^i} \delta q^i + \frac{\partial H}{\partial t} \delta t \text{ en reportant dans } \delta S$$

$$\text{il vient : } \delta S = \int_{\mu_A}^{\mu_B} \left(dq^i - \frac{\partial H}{\partial p_i} dt \right) \delta p_i - \left(dp_i + \frac{\partial H}{\partial q^i} dt \right) \delta q^i +$$

$$+ dt \left(\frac{dH}{dt} - \frac{\partial H}{\partial t} \right) \delta t.$$

Par un mot réel $\delta S = 0 \Rightarrow$

$$\boxed{\frac{dq^i}{dt} = \frac{\partial H}{\partial p_i} \text{ et } \frac{dp_i}{dt} = - \frac{\partial H}{\partial q^i} \text{ et } \frac{dH}{dt} = \frac{\partial H}{\partial t}}$$

▷

Il est utile de s'assurer de la rigueur du résultat en écrivant que pour toute fonction $g(\dot{q}_i, p_i) \geq 0$ le long de $\overline{AB}$ est nulle lorsque $u = u_A$ et $u = u_B$, on a :

$$\delta p_i = \left(\dot{q}_i - \frac{\partial H}{\partial p_i} \right) g \delta v \quad \delta q^i = - \left(\dot{p}_i + \frac{\partial H}{\partial q^i} \right) g \delta v$$

et $\delta H = \left(\frac{dH}{dt} - \frac{\partial H}{\partial t} \right) g \delta v$ qui assure la nullité de δS puisque cette variation est nulle dès que les eq canoniques sont satisfaites.

◁ Montrons maintenant que le principe de H-J $\Rightarrow$ le principe de moindre action. Pour cela nous considérons un système scléronome (liaisons indép. du temps) et conservatif de sorte que H indépendant de t : $\frac{\partial H}{\partial t} = 0$. Considérons la variation :

$$\delta \left(\int_{t_A}^{t_B} \sum_i p_i \dot{q}_i dt \right) = \int_{t_A}^{t_B} \sum_i (\delta p_i \dot{q}_i + p_i \delta \dot{q}_i) dt =$$

$$= \int_{t_A}^{t_B} \sum_i \left(\delta p_i \dot{q}_i + p_i \frac{d}{dt} \delta q^i \right) dt$$

d'après ce qu'a vu sur l'intervention de δ avec d/dt

l'IPP du second terme de la somme donne :

$$= \left[\sum_i p_i \delta q^i \right]_{t_A}^{t_B} + \int_{t_A}^{t_B} \sum_i (\delta p_i \dot{q}_i - \delta q^i \dot{p}_i) dt \text{ or d'après les eq. canoniques}$$

$$\dot{p}_i = - \frac{\partial H}{\partial q^i} \text{ et } \dot{q}^i = \frac{\partial H}{\partial p_i} \text{ d'où avec } \delta q^i(t_B) = \delta q^i(t_A) = 0$$

on obtient :

$$\delta S = \int (A^2 + B^2 + C^2) \delta v dt = 0$$

$$\delta \left(\int_{t_A}^{t_B} \sum_i p_i \dot{q}^i dt \right) = \int_{t_A}^{t_B} \sum_i \left(\delta p_i \frac{\partial H}{\partial p_i} + \delta q^i \frac{\partial H}{\partial q^i} \right) dt \Leftrightarrow$$

$$\delta \left(\int_{t_A}^{t_B} \sum_i p_i \dot{q}^i dt \right) = \int_{t_A}^{t_B} \delta H dt \text{ or pour } H \text{ indépendant de } t \text{ ce}$$

$$\text{dernier terme vaut } \delta \left(\int_{t_A}^{t_B} H dt \right) = \delta (H(t_B - t_A)) = 0 \text{ Donc}$$

nous avons montré que la q.té: $\int_{t_A}^{t_B} \sum_i p_i dq^i$ était extré-
male. Or $H = K + E_{\text{pot}}$ et comme $p_i dq^i = \frac{\partial K}{\partial \dot{q}^i} \dot{q}^i dt$
où K peut toujours se ramener à une fonction

homogène de d° 2 par rapport aux $\dot{q}^i$ de sorte que $K = K^{(2)}$

Mais d'après le théor. d'Euler $\sum_i \dot{q}^i \frac{\partial K^{(2)}}{\partial \dot{q}^i} = 2 K^{(2)} = 2K$

$$\delta \left(\int_{t_A}^{t_B} \sum_i p_i dq^i \right) = 0 \Leftrightarrow \delta \left(\int_{t_A}^{t_B} 2K dt \right) = 0 \text{ ce qui est le principe de Maupertuis. } \blacktriangleright$$

◁ Remarque : écrivons que $K = K^{(2)} = \frac{1}{2} M_{ij} \dot{q}^i \dot{q}^j$ comme forme
quadratique homogène des $\dot{q}^i$. Pour un syst. conservatif on a

$$\mathcal{E}_{\text{tot}} = K^{(2)} + E_{\text{pot}} \text{ et puisque } K^{(2)} = \sqrt{K^{(2)}} \sqrt{K^{(2)}} \text{ on a :}$$

$$K^{(2)} = \sqrt{\mathcal{E}_{\text{tot}} - E_{\text{pot}}} \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{M_{ij} dq^i dq^j} \times \frac{1}{dt}. \text{ Posons}$$

$$g_{ij} = \sqrt{2(\mathcal{E}_{\text{tot}} - E_{\text{pot}})} M_{ij} \text{ alors on peut écrire le principe de}$$

$$\text{Maupertuis sous la forme } \delta S = \delta \left(\int_{\overline{AB}} \sqrt{g_{ij} dq^i dq^j} \right) \Leftrightarrow$$