

Cours du 21 novembre 2018

Gradients et potentiels

ex: $\Delta U = \frac{\rho}{\epsilon_0}$

soit $U: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ supposé différentiable
sur un ouvert $M \subset \mathbb{R}^3$

en tout point $M_0 \in M$ on a:

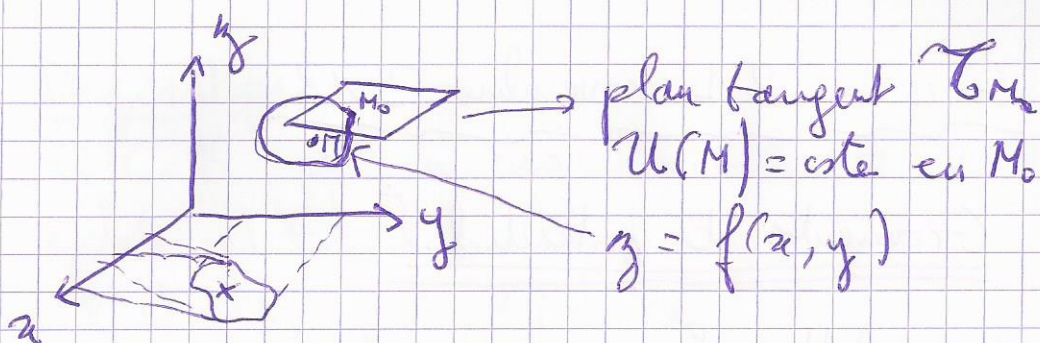
$$dU = \vec{\text{grad}}_{M_0} U \cdot d\vec{M}$$

Propriété 1:

$\vec{\text{grad}}_{M_0} U$ est un vecteur orthogonal
au plan tangent en M_0 à $U(M) = \text{cste}$

$$U(x, y, z) = U_0 = U(M_0)$$

on passe par le théorème d'inversion locale.



Preuve :

au 1^{er} ordre lorsque $\lim_{M \rightarrow M_0} \vec{\Delta M} = \vec{0}$

on a $\Delta U = U(M) - U(M_0) \rightarrow 0$

or à la limite on sait que

$$dU = \vec{\text{grad}}_{M_0} U \cdot d\vec{M}$$

où $dU = \lim_{M \rightarrow M_0} \Delta U$

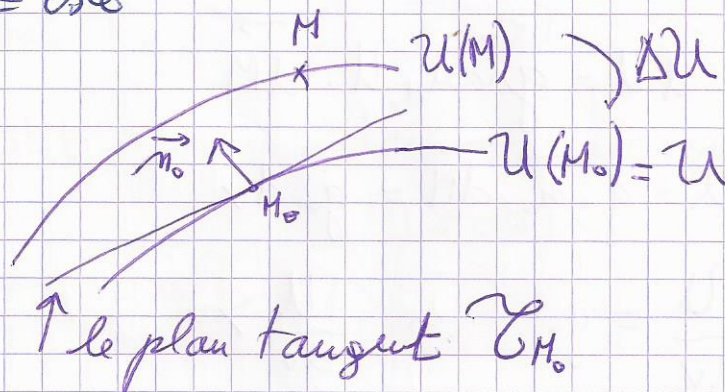
on en déduit au 1^{er} ordre que :

$$0 = \vec{\text{grad}}_{M_0} U \cdot d\vec{M}$$

$$\Rightarrow \vec{\text{grad}}_{M_0} U \perp T_{M_0}$$

Propriété 2:

$\vec{\text{grad}}_{M_0} U$ est orienté dans le sens de U croissante par rapport à la surface $U(M) = \text{cte}$



Soit M voisin de M_0 mais situé sur

$$U = U_0 + \Delta U \neq U_0$$

$\vec{n}_0$ est choisi tel que $\vec{n}_0$ et $\vec{M_0M} (= \vec{\Delta M})$ soit du même demi-plan.

$$\vec{\Delta M} \cdot \vec{n}_0 = v > 0 \quad v \text{ est variable avec } M.$$

$$\lim_{M \rightarrow M_0} \vec{\Delta M} \cdot \vec{n}_0 = dv > 0$$

D'après la 1^{ère} propriété on peut poser
que $\vec{\text{grad}}_H U = g_0 \vec{n}_0$

Comme $d\vec{M} \cdot \vec{n}_0 = dv$

et $dU = \vec{\text{grad}}_H U \cdot d\vec{M}$

$dU = g_0 \vec{n}_0 \cdot d\vec{M} = g_0 dv$

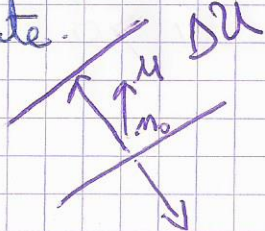
$\frac{dU}{dv} = g_0$ si $\frac{dU}{dv} > 0$

U est croissant et $g_0 > 0$

$\vec{\text{grad}}_H U$ est orienté dans le même sens que
l'augmentation de U .

ou bien $\frac{dU}{dv} < 0$, U est décroissant et $g_0 < 0$

donc $\vec{\text{grad}}_H U$ est orienté en sens opposé
de la diminution de U du côté où
 U augmente.

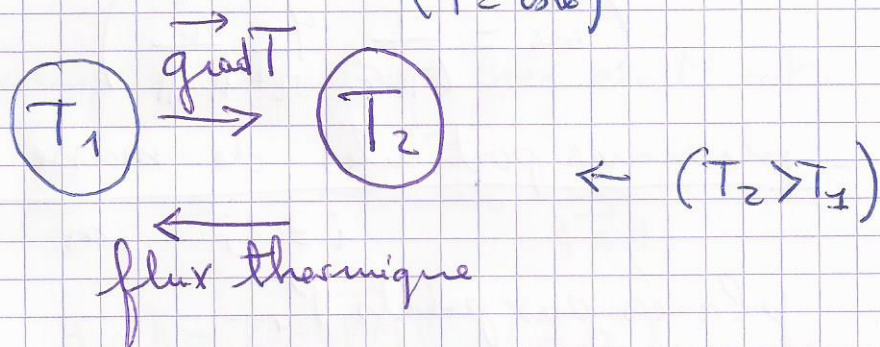


Exemples de champs de gradient :

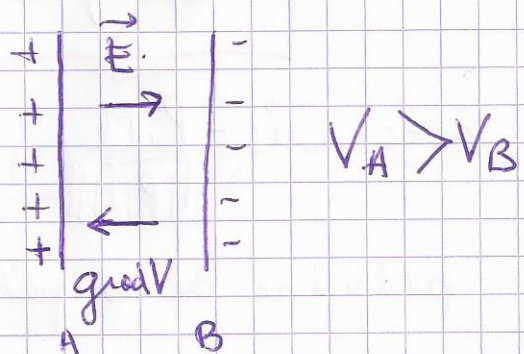
* gradient de pression dans un liquide dans un champ de pesanteur uniforme.

* le gradient de température entre deux thermostats T_1, T_2 $T_2 > T_1$

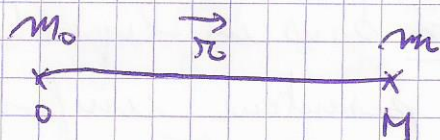
thermostat = corps à température constante ($T = \text{cte}$)



* champ électrique :



* Cas d'un champ en $\frac{1}{r^2}$:



en M s'exerce une force $\vec{f} = m \vec{G}(M)$

$$\text{où } \vec{G}(M) = - \frac{G m_0}{r^2} \frac{\vec{r}}{\|\vec{r}\|}$$

$$\left(\text{ou } = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_0}{r^2} \frac{\vec{r}}{\|\vec{r}\|} \right)$$

- plusieurs particules de masse m_i

$i = 1, \dots, n$

placés aux points P_i

$$\vec{G}(M) = - \sum_i g \frac{m_i}{r_i^2} \vec{u}_i$$

avec $\vec{u}_i = \frac{\vec{P_i M}}{\|\vec{P_i M}\|}$ et $\|\vec{P_i M}\| = r_i$

principe de superposition (linéarité)

et distribution continue de matière

Soit D un domaine de $\mathbb{R}^3$ en tout point duquel est définie :

$\mu: P \rightarrow \mu(P)$ masse volumique

alors pour des éléments de volume entourant P , on a : $dm = \mu(P) dv$

Le champ élémentaire créé en M est :

$$-g \frac{dm}{r^2} \vec{u}_r \quad \text{où} \quad \vec{u}_r = \frac{\vec{r}}{\|\vec{r}\|}$$

$$\|\vec{r}\| = r = \|PM\| \quad (= r)$$

Le champ total est :

$$\vec{G}(M) = \iiint_D -g \frac{\mu(P)}{r^2} \vec{u}_r dv$$

D ou tout l'espace.

Cours du 5 décembre 2018

Calcul du champ de gravitation (suite)

On fait travailler le champ $\vec{G}(r)$
sous un déplacement infinitésimal $d\vec{M}$:

$$\delta W_G = \vec{G} \cdot d\vec{M}$$

cela s'appelle le travail du champ

$$\vec{G}(r) = -g \frac{m_0}{r^2} \vec{u}_r \quad \text{avec } \vec{u}_r = \frac{\vec{r}}{\|\vec{r}\|}$$

en coordonnées sphériques:

$$d\vec{M} = dr \vec{u}_r + r d\theta \vec{u}_\theta + r \sin\theta d\varphi \vec{u}_\varphi$$

la base $\vec{u}_r, \vec{u}_\theta, \vec{u}_\varphi$ étant orthogonale,
le produit scalaire vaut:

$$\delta W_G = -g \frac{m_0}{r^2} dr = -d \left[-g \frac{m_0}{r} + \text{cte} \right]$$

θ : angle de colatitude

(en math. on utilise plutôt la colatitude,
en astro plutôt la latitude).

la quantité entre crochets est
le potentiel
gravitationnel:

$$V(M) = -g \frac{m_0}{r} + \text{cte} \leq 0$$

il est négatif, on pose $\text{cte} = 0$ pour
que le potentiel soit nul à l'infini.

Conséquences mathématiques: (il est noté V ou ϕ)
($V(M)$ ou $\phi(M)$)

$$dV(M) = \vec{\text{grad}}_M V \cdot d\vec{M}$$

on en déduit: $\vec{G}(M) = -\vec{\text{grad}}_M V (= -\vec{\text{grad}}_M \phi)$

$$(\delta W_{\vec{G}} = -dV(M))$$

et on dit que $\vec{G}$ est un champ de gradient.

On dit aussi que $\vec{G}$ dérive d'un potentiel
 $V(M)$.

$$\text{On a: } \Delta W_{\vec{G}} = \int_A^B \delta W_{\vec{G}} = \int_A^B -dV(M) = V(A) - V(B)$$

travail du champ sur un espace fini
c'est une diminution du potentiel.

Conséquence :

la circulation sur un contour fermé et simple (i.e pas de " ∞ ", " 8 ") et rectifiable par morceaux (c.f.s.r.p.m.) est nul.

Remarque 1 :

Si on fait travailler une particule sur le champ de gravitation depuis l'infini. A est à l' ∞ , alors le travail vaut $-V(B)$ et donc le travail est positif (le potentiel est négatif), le travail est moteur.

Remarque 2 :

$$\vec{f} = m \vec{g} = -m \vec{\text{grad}}_H V = \vec{\text{grad}}_H (-mV)$$

mV est homogène à une énergie que l'on appelle énergie potentielle et donc :

$$\vec{f} = \vec{\text{grad}}(-E_{\text{pot}}) = \vec{\text{grad}} U$$

$U = -E_{\text{pot}}$ est une fonction de force.

$$\text{et } E_{\text{pot}} = mV = m\phi$$

Exemple:

Dans le cadre d'un champ électrique $\vec{E}$ uniforme

$$\vec{f} = q \vec{E}$$

Si on fait travailler cette force :

$$\Delta W = \int_A^B q \vec{E} \cdot d\vec{M}$$

Si le trajet est rectiligne :

$$\Delta W = q \vec{E} \cdot \vec{AB} = q [V(A) - V(B)]$$

si $q = 1,6 \times 10^{-19} \text{ C}$ et $V(A) - V(B) = 1 \text{ V}$

$\Rightarrow$ on a 1 eV, électron-volt

Vocabulaire mathématique :

- $\vec{F}$ est un champ de vecteurs
- $\omega = \vec{F} \cdot d\vec{M}$ est une forme différentielle du 1^{er} ordre défini sur un ouvert de $\mathbb{R}^3$

a) C est fermée si $\vec{\text{rot}} \vec{F} = \vec{0}$

b) les énoncés ci-dessous sont équivalents :

- * $\vec{F}$ est un champ conservatif sur U ,

- * $\vec{F}$ dérive d'une énergie potentielle,
(ou d'une fonction de force qui est l'opposé
de l' E_{pot}),

- * $\vec{F}$ est un champ de gradient,

- * w est une différentielle exacte sur U ,

- * w est intégrable sur U ,

- * $\int_{\widehat{AB}} \vec{F} \cdot d\vec{M}$ est indépendant de la courbe
simple rectifiable par morceaux $\widehat{AB}$
(c.s.r.p.m.)

- * $\oint \vec{F} \cdot d\vec{M} = 0$ sur une c.s.r.p.m.

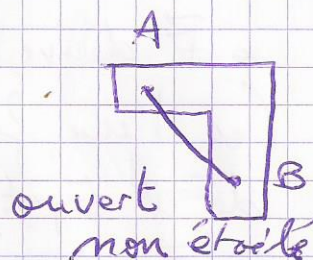
c) on démontre que si w est exacte,
alors C est fermée (soit $\vec{\text{rot}} \vec{F} = \vec{0}$)
mais la réciproque n'est pas évidente
(Lemme de Poincaré)

Définition :

$U \subset \mathbb{R}^3$ est un ouvert étoilé si il existe $A \in U$, tel que :

$$\forall B \in U, [A, B] \subset U$$

ouvert étoilé :



On a la réciproque :

ω fermée $\Rightarrow \omega$ exacte si U est un ouvert étoilé.

(c'est le lemme de Poincaré).