

Mercrèdi 2 octobre de l'an 2019:

SAF, 18H. Cours de Stéphanie Mihajlovic.

Plan du cours de 2019 / 2020:

- I Algèbre bilinéaire et espace euclidien
- II Transformations infinitésimales - Algèbre tensorielle.
- III Variétés - Calcul différentiel sur les variétés.
- IV Etude de quelques métriques.

I Algèbre bilinéaire et espace euclidien

A Espaces vectoriels et applications linéaires.

Définition:

Un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$ est un ensemble d'objets sur lesquels on définit

2 opérations : $+$ $\vec{u} + \vec{v} = \vec{s}$

$\cdot$ $\alpha \cdot \vec{u} = \vec{v}$ colinéaire à $\vec{u}$

Propriétés:

- $\vec{u} + \vec{v} = \vec{v} + \vec{u}$
- $\vec{u} + \vec{v} + \vec{w} = (\vec{u} + \vec{v}) + \vec{w} = \vec{u} + (\vec{v} + \vec{w})$
- $\exists \vec{0}_E$ tel que $\vec{u} + \vec{0}_E = \vec{u}$, $\vec{0}_E = \vec{0}$
- $\forall \vec{u}, \exists -\vec{u}$ tel que $\vec{u} + (-\vec{u}) = \vec{0}$
- $1\vec{u} = \vec{u}$, $(-1)\vec{u} = -\vec{u}$
- $\alpha \cdot \beta \cdot \vec{u} = \alpha \cdot (\beta \vec{u}) = (\alpha \cdot \beta) \cdot \vec{u}$
- $\alpha (\vec{u} + \vec{v}) = \alpha \vec{u} + \alpha \vec{v}$
- $\vec{u} (\alpha + \beta) = \alpha \vec{u} + \beta \vec{u}$

Définition:

Un sous-espace vectoriel F de E est une partie de E contenant $\vec{0}$ et telle que l'on retrouve dans F toutes les propriétés de $+$ et $\cdot$.

Définition:

Une famille libre de vecteurs de E $(\vec{u}_1, \vec{u}_2, \dots, \vec{u}_k)$ est telle que pour obtenir $\vec{0}$ par une combinaison linéaire:

$$\alpha_1 \vec{u}_1 + \dots + \alpha_k \vec{u}_k = \vec{0}$$

ne peut se faire que si $\alpha_1 = \dots = \alpha_k = 0$

A contrario, si on peut avoir :

$\alpha_1 \vec{u}_1 + \dots + \alpha_k \vec{u}_k = \vec{0}$ avec au moins un $\alpha_i \neq 0$, alors la famille est non libre.

Définition :

Une famille de vecteurs $(\vec{u}_1, \dots, \vec{u}_k)$ est génératrice d'un e.v. E si on peut fabriquer tous les vecteurs de E par des combinaisons linéaires de ces k vecteurs.

Définition :

Une base de E est une famille libre et génératrice.

Théorème :

Soit $(\vec{e}_1, \dots, \vec{e}_n)$ une base de E alors tout vecteur $\vec{v} \in E$ s'écrit par une comb. lin. unique de ces n vecteurs.

Preuve : Supposons qu'il existe $\alpha_1 \vec{e}_1 + \dots + \alpha_n \vec{e}_n = \vec{v}$
et $\beta_1 \vec{e}_1 + \dots + \beta_n \vec{e}_n = \vec{v}$

$$\alpha_1 \vec{e}_1 + \dots + \alpha_n \vec{e}_n = \beta_1 \vec{e}_1 + \dots + \beta_n \vec{e}_n$$

$$(\alpha_1 - \beta_1) \vec{e}_1 + \dots + (\alpha_n - \beta_n) \vec{e}_n = \vec{0}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \alpha_1 - \beta_1 = 0 \\ \dots \\ \alpha_n - \beta_n = 0 \end{cases} \Rightarrow \alpha_i = \beta_i \quad \forall i = 1, \dots, n$$

LPEF.

Définition :

On appelle rang d'une famille de vecteurs le nbre maximum de ces vecteurs formant une famille libre.

Théorème :

Le rang de n'importe quelle famille de vecteurs de dimension n est toujours $\leq n$.

Δ Preuve :

Supposons E de dim. 2 et $(\vec{e}_1, \vec{e}_2)$ une base de E . Considérons 3 vecteurs q -gés de E

choisissons : $(\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{w})$

et formons : $\alpha \vec{e}_1 + \beta \vec{e}_2 + \gamma \vec{w} = \vec{0}$

Or $\vec{w} \in E$, donc $\exists (w_1, w_2) \text{ tq}$:

$$\vec{w} = \begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \end{pmatrix}_{(\vec{e}_1, \vec{e}_2)} = w_1 \vec{e}_1 + w_2 \vec{e}_2$$

$$\Rightarrow \alpha \vec{e}_1 + \beta \vec{e}_2 + \gamma w_1 \vec{e}_1 + \gamma w_2 \vec{e}_2 = \vec{0}$$

$$\Leftrightarrow (\alpha + \gamma w_1) \vec{e}_1 + (\beta + \gamma w_2) \vec{e}_2 = \vec{0}$$

$$\text{ou bien } \alpha \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \gamma \begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & w_1 \\ 0 & 1 & w_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \alpha + \gamma w_1 = 0 \\ \beta + \gamma w_2 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \alpha = -\gamma w_1 \\ \beta = -\gamma w_2 \end{cases}$$

$\Rightarrow \gamma$ étant quelconque, il n'y a aucune raison que $\alpha = \beta = \gamma = 0$ donc la famille n'est pas libre donc le rang est < 3 .
LPEF. Δ

Théorème :

n vecteurs libres d'un espace de dim. n forment une base de cet espace.

Preuve:

Soit $(\vec{l}_1, \dots, \vec{l}_n)$ n vecteurs libres

Supposons $\vec{w} \in E$ qui ne s'écrit pas
à l'aide de ces n vecteurs (la famille est
donc ^{supposée} non génératrice) donc la famille
 $(\vec{l}_1, \dots, \vec{l}_n, \vec{w})$ est libre.

Or ceci est contradictoire avec le théorème
précédent. Donc $(\vec{l}_1, \dots, \vec{l}_n)$ est génératrice
et donc c'est une base.

L P E F.

Applications linéaires

Définition:

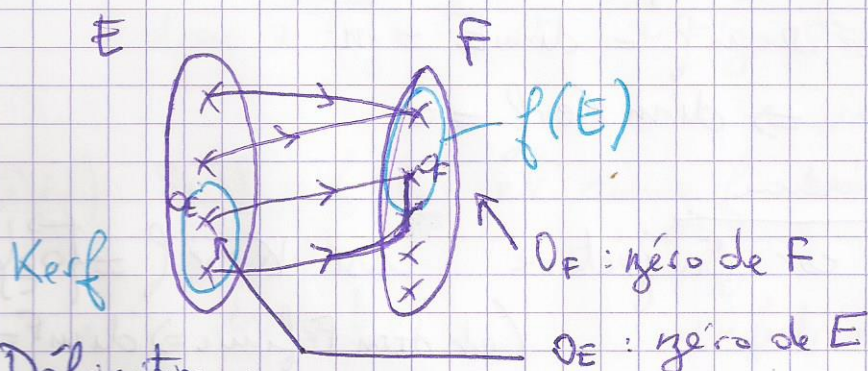
Soit f une application d'un e.v. E
vers un e.v. F . On dit que f est linéaire
ssi on a $\forall \vec{u}, \vec{v} \in E$

$$f(\vec{u} + \vec{v}) = f(\vec{u}) + f(\vec{v})$$

$$f(\alpha \vec{u}) = \alpha f(\vec{u})$$

(c'est un morphisme d'espace vectoriel)

L'ens. des applications linéaires de E vers F noté $\mathcal{L}(E, F)$ est un espace vectoriel.



Définition :

On appelle rang de f la dim. de $f(E)$

Définition :

On appelle noyau de f le sous e.v. de E constitué des vecteurs dont l'image est 0_F .
noté $\text{Ker } f$

Théorème du rang :

Soit E de dim n et $f \in \mathcal{L}(E, F)$
alors on a : $\text{rang } f + \dim \text{Ker } f = \dim E = n$.

Remarques:

- i) la dim. de F ne joue aucun rôle
(dim. F peut être ∞)
- ii) si $\text{rang } f = \dim E = n$
 $\Rightarrow \dim \text{Ker } f = 0$

Théorème:

f est injective ssi $\text{Ker } f = \{\vec{0}_E\}$
(et $\dim F$ finie $\Rightarrow \dim F = \dim E$
 $\Rightarrow f$ est bijective)

△ Preuve:

1) $\Rightarrow$: f injective
soit $\vec{y} \in \text{Ker } f$
si $\vec{x} \in E$ et

$$\vec{x} \neq \vec{y} \text{ on } f(\vec{x} + \vec{y}) = f(\vec{x}) + \vec{0}_F = f(\vec{x})$$
$$f \text{ injective} \Rightarrow \vec{x} + \vec{y} = \vec{x} \Rightarrow \vec{y} = \vec{0}_E$$

2) $\Leftarrow$:

$$\text{Ker } f = \{\vec{0}_E\}$$

soient $\vec{x}$ et $\vec{y}$ tels que $f(\vec{x}) = f(\vec{y})$

$$\Leftrightarrow f(\vec{x}) - f(\vec{y}) = \vec{0}_F$$

$$\Leftrightarrow f(\vec{x}) + f(-\vec{y}) = \vec{0}_F$$

$$f(\vec{x} - \vec{y}) = \vec{0}_F \quad \text{or} \quad \text{Ker } f = \{ \vec{0}_E \}$$

donc $\vec{x} - \vec{y} = \vec{0}_E \Leftrightarrow \vec{x} = \vec{y}$ donc f est injective $\triangleright$

iii) Si $F = f(E)$ et $\text{rang } f = \dim E$

$\uparrow$ surjective $\updownarrow$ injective

alors on démontre que F est de $\dim n = \dim E$ et f bijective se nomme :
"isomorphisme d'e.v."

$$\text{iv) } \text{rang } f = \dim E - \dim \text{Ker } f$$

On voit que plus $\text{Ker } f$ est "grand",
 plus $f(E)$ est "petit".

Représentation matricielle :

$(\vec{e}_1, \dots, \vec{e}_n)$ base de E

$(\vec{u}_1, \dots, \vec{u}_p)$ base de F

$$\vec{x} \in E \quad \vec{x} = \sum_{i=1}^n x_i \vec{e}_i$$

$$f(\vec{x}) = \sum_{i=1}^n f(\vec{e}_i)$$

la connaissance des $f(\vec{e}_i)$ dans F définit univoquement f .

$$f(\vec{e}_i) = \sum_{j=1}^p a_{ij} \vec{u}_j$$

$$M_f = \begin{pmatrix} f(\vec{e}_1) & f(\vec{e}_2) & \dots & f(\vec{e}_n) \\ a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{p1} & a_{p2} & \dots & a_{pn} \end{pmatrix} \begin{matrix} \vec{u}_1 \\ \vdots \\ \vec{u}_p \end{matrix}$$

matrice $p \times n$

Définition:

$\text{rang } M_f = \text{rang } f$ est égal au nbre max. de vecteurs colonnes de M_f qui sont libres dans F .

• Si $F = E$ alors f se nomme opérateur linéaire (ou endomorphisme) de E .

Déf.:

On considère un isomorphisme de $E \rightarrow E$ permettant de changer la base $(\vec{e}_i)_{1 \leq i \leq n}$ en une base $(\vec{e}'_j)_{1 \leq j \leq n}$ telle que:

$$f(\vec{e}_i) = \vec{e}'_i$$

$$\vec{e}'_i = \sum_{j=1}^n p_{ij} \vec{e}_j$$

La matrice formée des $\vec{e}'_i$ en colonne se nomme matrice de passage $(P) = (p_{ij})$ de la base $(\vec{e}_i)$ à la base $(\vec{e}'_i)$.

Théorème:

On a : si $\vec{x}$ est représenté par $\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}_{(\vec{e}_i)} = (\vec{x})$

$$(\vec{x})_{(\vec{e}')} = (P) (\vec{x})_{(\vec{e})}$$

On dit que les composantes des vecteurs se transforment de façon contraire aux vecteurs de base ou encore que les composantes sont contravariantes.