

Mercrèdi 16 octobre de l'an 2019

SAF, 18H : Cours de Stéphane Mihajlovic

$$\text{base}(\vec{e}_i) \quad \vec{x} = \sum_i x^i \vec{e}_i$$

$$(P) \downarrow$$
$$\text{base}(\vec{e}_j') \quad \vec{x} = \sum_j x'^j \vec{e}_j'$$

$$\vec{e}_j' = \sum_i p_j^i \vec{e}_i \quad : \text{vecteurs colonnes de } (P)$$

$$\underline{(x) = (P)(x')}$$

Preuve :

$$\vec{x} = \sum_i x^i \vec{e}_i = \sum_j x'^j \vec{e}_j'$$

$$\vec{x} = \sum_j x'^j \left(\sum_i p_j^i \vec{e}_i \right)$$

$$= \sum_j \sum_i \dots = \sum_i \sum_j x'^j p_j^i \vec{e}_i$$

$$= \sum_i \left(\sum_j x'^j p_j^i \right) \vec{e}_i$$

$$\Rightarrow x^i = \sum_j p_j^i x'^j = (P)(x')$$

3) Cas des formes linéaires définies sur un e.v. E

Définition :

Soit $f^* : E \rightarrow \mathbb{R}$
 $\vec{x} \mapsto f^*(\vec{x})$ linéaire.

Théorème :

$\mathcal{L}(E, \mathbb{R})$ est un $\mathbb{R}$ -e.v. noté E^*

Théorème :

E^* est de dim n et peut toujours avoir comme base de E^* les n formes $e^{*i} : E \rightarrow \mathbb{R}$ définies par : $e^{*i}(\vec{x}) = x^i$

Preuve :
$$e^{*i}(\alpha \vec{x} + \beta \vec{y}) = \alpha x^i + \beta y^i$$
$$= \alpha e^{*i}(\vec{x}) + \beta e^{*i}(\vec{y})$$

$\rightarrow$ linéarité

En particulier on va poser :

$$\boxed{e^{*i}(\vec{e}_j) = \delta_j^i}$$

$$\begin{aligned}
 f^*(\vec{x}) &= f^*\left(\sum_i x^i \vec{e}_i\right) = \sum_i x^i f^*(\vec{e}_i) \\
 &= \underbrace{\sum_i f^*(\vec{e}_i) e^{*i}(\vec{x})}_{f^*}
 \end{aligned}$$

$\Rightarrow$ la famille (e^{*i}) engendre f^* .

Considérons la combinaison nulle:

$$\begin{aligned}
 \sum_i k_i e^{*i} &= 0^* \\
 \forall \vec{x}, \sum_i k_i e^{*i}(\vec{x}) &= 0^*(\vec{x})
 \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \sum_i k_i x^i = 0$$

si $\vec{x} = \overset{t}{(1, 0, \dots, 0)}$ par exemple
 $= \vec{e}_1$

On a $k_1 = 0$, de même si on choisit
 pour $\vec{x}$: $\vec{e}_2, \dots, \vec{e}_n$

on trouve $k_1 = k_2 = \dots = k_n = 0$

donc la famille est libre.

Donc c'est une base de E^* .

On posera $f^*(\vec{e}_i) = f_i$ de sorte que
dans la base duale (e^{*i})

$$\text{On a : } f^* = \sum_i f_i e^{*i}$$

Remarque :

$$\begin{aligned} e^{*i}(\vec{e}_j') &= e^{*i}\left(\sum_l p_{jl}^l \vec{e}_l\right) = \sum_l p_{jl}^l e^{*i}(\vec{e}_l) \\ &= \sum_l p_{jl}^l \delta_{li}^i \end{aligned}$$

($\delta_{li}^i = 1$ si $i = l$, 0 sinon)

$$(x) = (P)(x') \Rightarrow (x') = (P)^{-1}(x)$$

$$\begin{aligned} \forall \vec{x} \in E, f^*(\vec{x}) &= f^*\left(\sum_j x'_j \vec{e}_j'\right) \\ &= \sum_j x'_j f^*(\vec{e}_j') \\ &= \sum_j x'_j f^*\left(\sum_l p_{jl}^l \vec{e}_l\right) \\ &= \sum_j x'_j \sum_l p_{jl}^l f_l = \sum_j x'_j f_j \\ f^*(\vec{x}) &= \sum_i f_i x^i = \sum_j f_j x'_j \end{aligned}$$

Pour les composantes de f^* on obtient les nouvelles en fonction des anciennes par la matrice (P) .

$$f'_j = \sum_k P_{jk}^l f_k$$

$$(f'_1, \dots, f'_n) = (f_1, \dots, f_n) (P_j^l)$$

Exemple:

$$(P) = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{matrix} \vec{e}_1' \\ \vec{e}_2' \\ \vec{e}_3' \end{matrix}$$

$$\det(P) = 1 \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} + 0 + 1 \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} \quad \neq 0$$

$\nwarrow (-1)^{i+j}$

forme linéaire: $f^*(\vec{x}) = 3x^1 + x^2 - x^3$

Soit $\vec{u} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}$ calculer $\vec{u}$ dans $(\vec{e}_j')$

$\begin{matrix} \vec{e}_1' \\ \vec{e}_2' \\ \vec{e}_3' \end{matrix}$

$$(P) = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Inversons
la matrice (P)

$$L_3 - L_1 \rightarrow L_3 \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & -2 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$2L_2 + L_3 \rightarrow L_3 \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

(P)

$$\downarrow$$

$$\begin{aligned} x + 2y + z &= a \\ y + z &= b \\ 2z &= c \end{aligned}$$

$$\Rightarrow z = \frac{1}{2}c, \quad y = b - \frac{1}{2}c$$

$$x = -2b + c - \frac{1}{2}c + a = a - 2b + \frac{1}{2}c$$

$$\begin{pmatrix} P' \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = (P')^{-1} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$$

$$\text{On lit: } (P')^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -2 & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 & -\frac{1}{2} \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \dots \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -1 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 0 & -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & 1 & \frac{1}{2} \end{pmatrix} = (P)^{-1}$$

$$(\vec{u}) = (P)^{-1}(\vec{u}) = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} \\ \frac{5}{2} \end{pmatrix}$$

$$f^*(\vec{u}) = 3x^1 + x^2 - x^3 = 3$$

$$(f^*) = (3 \ 1 \ -1)_{(e^{*i})}$$

$$(f^{*'}) = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} (3 \ 1 \ -1)$$

(P)

$$= (2 \ 7 \ 3)_{(e^{*i'})}$$

$$\vec{e}_i \xrightarrow{(P)} \vec{e}_i'$$

$$(x) \xleftarrow{(P)} (x')$$

$$(f_i) \xrightarrow{(P)} (f_i')$$

$$e^{*i} \xleftarrow{(P)} e^{*i'}$$

Théorème :

Les formes de base de E^* associées par dualité en vecteurs de base de E se transforment de façon contravariante.

$$e^{*i}(\vec{e}_j) = \delta_{ij}$$

$$\forall \vec{x} \in E, \quad \vec{x} = \sum_i x^i \vec{e}_i$$

$$e^{*j}(\vec{x}) = \sum_i x^i e^{*j}(\vec{e}_i) = \sum_i x^i \delta_{ij}$$

$$= x^j = \sum_i (P_{ij}^{-1}) x^i$$

$$= \sum_i \pi_{ij} x^i$$

$$= \sum_i \pi_{ij} e^{*i}(\vec{x})$$

$$\Rightarrow e^{*j} = \sum_i \pi_{ij} e^{*i}$$

$$(R) = (P)^{-1}$$

B) Formes bilinéaires et pseudo produit scalaire

1) Formes bilinéaires

Une application

$$b: E \times F \rightarrow \mathbb{R}$$

$(x, y) \mapsto b(\vec{x}, \vec{y})$ est bilinéaire

ssi elle est linéaire par rapport à chacun des 2 arguments

$$b(\vec{x}, \vec{y}_1 + \vec{y}_2) = b(\vec{x}, \vec{y}_1) + b(\vec{x}, \vec{y}_2)$$

$$F = E$$

Définition:

b est symétrique $b(\vec{x}, \vec{y}) = b(\vec{y}, \vec{x})$