

Mercrèdi 6 novembre de l'an 2019

SAF, 18H. Cours de Stéphanie Mihajlovic

Définition:

Soit b une application de $E \times E \rightarrow \mathbb{R}$

on dit que b est bilinéaire si

- $b(\vec{u}, \vec{v}_1 + \vec{v}_2) = b(\vec{u}, \vec{v}_1) + b(\vec{u}, \vec{v}_2)$
- $b(\vec{u}, \alpha \vec{v}) = \alpha b(\vec{u}, \vec{v})$
- $b(\vec{u}_1 + \vec{u}_2, \vec{v}) = b(\vec{u}_1, \vec{v}) + b(\vec{u}_2, \vec{v})$
- $b(\alpha \vec{u}, \vec{v}) = \alpha b(\vec{u}, \vec{v})$

Si de plus on a $b(\vec{u}, \vec{v}) = b(\vec{v}, \vec{u})$
alors b est symétrique.

Soit $\vec{x} = \sum_i x^i \vec{e}_i$ dans une base $(\vec{e}_i)_{i=1, \dots, n}$

$$\vec{y} = \sum_i y^i \vec{e}_i$$

$$b(\vec{x}, \vec{y}) = \sum_i \sum_j x^i y^j b(\vec{e}_i, \vec{e}_j)$$

Par définition les n^2 nbres $b(\vec{e}_i, \vec{e}_j)$
forment la matrice de b dans la base
considérée.

Si on pose $b_{ij} = b(\vec{e}_i, \vec{e}_j)$

on a : $b(\vec{x}, \vec{y}) = {}^t(x)(b)(y)$

$$\text{où } (x) = \begin{pmatrix} x^1 \\ \vdots \\ x^n \end{pmatrix} \quad (y) = \begin{pmatrix} y^1 \\ \vdots \\ y^n \end{pmatrix}$$

Formule de changement de base :

soit un changement de base

$(\vec{e}_i) \rightarrow (\vec{e}'_i)$ de matrice (P)

alors la matrice de b dans la nouvelle base est donnée par :

$$(b') = {}^t(P)(b)(P)$$

Preuve :

$$(P)(x') = (x) \quad (x') = (P)^{-1}(x)$$

$$b(\vec{x}, \vec{y}) = {}^t(x)(b)(y)$$

$$= {}^t((P)(x'))(b)((P)(y'))$$

$$= {}^t(x') {}^t(P)(b)(P)(y')$$

$$\Rightarrow {}^t(x')(b')(y') = b(\vec{x}', \vec{y}') = (b') \quad 2$$

Définition :

Soit une $q : E \rightarrow \mathbb{R}$

On dit que q est une forme quadratique (f.q.)
ssi il existe une forme
bilinéaire b telle que :

$$b(\vec{u}, \vec{u}) = q(\vec{u})$$

Théorème :

Soit q une f.q. alors il existe une unique
forme bilinéaire symétrique b telle
que $b(\vec{u}, \vec{u}) = q(\vec{u})$

Preuve :

Puisque q est une f.q. par déf. on admet
l'existence de β bil. sym. telle que $\beta(\vec{u}, \vec{u}) = q(\vec{u})$

$$\text{Posons } b(\vec{u}, \vec{v}) = \frac{1}{2} (\beta(\vec{u}, \vec{v}) + \beta(\vec{v}, \vec{u}))$$

$$\text{ona: } b(\vec{u}, \vec{u}) = q(\vec{u})$$

$$\begin{aligned} q(\vec{u} + \vec{v}) &= b(\vec{u} + \vec{v}, \vec{u} + \vec{v}) \\ &= b(\vec{u}, \vec{u}) + b(\vec{v}, \vec{v}) + 2b(\vec{u}, \vec{v}) \end{aligned}$$

$$q(\vec{u} + \vec{v}) = q(\vec{u}) + q(\vec{v}) + 2b(\vec{u}, \vec{v})$$

donc $b(\vec{u}, \vec{v})$ est définie univoquement (unique) par:

$$b(\vec{u}, \vec{v}) = \frac{1}{2} [q(\vec{u} + \vec{v}) - q(\vec{u}) - q(\vec{v})]$$

Exemple :

- si X et Y sont 2 variables aléatoires, on a également

$$\text{Cov}(X, Y) = \frac{1}{2} [V(X+Y) - V(X) - V(Y)]$$

V : variance Cov : covariance

- Une forme q étant donnée, le nbre $q(\vec{u})$ est une somme de termes du type $b_{ij}(u^i)^2$ et $b_{ij}u^i u^j$.
Pour trouver (b) on remplace les termes carrés $(u^i)^2$ par $u^i v^i$ et les termes $u^i v^j$ par $\frac{1}{2}(u^i v^j + u^j v^i)$

$$\vec{u} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}, q(\vec{u}) = 2x^2 - xy - 3y^2$$

$$\vec{v} \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$$

↓

$$2xx' - \frac{1}{2}(xy' + yx') - 3yy'$$

$$b(\vec{u}, \vec{v}) = {}^t(u)(b)(v)$$

$$= (x \ y) \begin{pmatrix} 2x' & -\frac{1}{2}y' \\ -\frac{1}{2}x' & -3y' \end{pmatrix}$$

$$= (x \ y) \begin{pmatrix} 2 & -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$$

Définition:

2 vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ tels que $b(\vec{u}, \vec{v}) = 0$
sont orthogonaux.

Définition:

Si V est un sous e.v. de E , l'ens. $V^\perp$
des vecteurs $\vec{v}$ orthogonaux à tout vecteur
 $\vec{u} \in V$ est l'orthogonal de V .

Définition:

Un vecteur $\vec{u}$ est isotrope si $q(\vec{u}) = 0$.

Définition:

L'orthogonal de E tout entier se nomme
le noyau de q : $\text{Ker } q$. $E^\perp = \text{Ker } q$

Remarque:

Comme pour les applications linéaires
en dim. finie, le théorème du rang
s'applique :

$$\text{le rang } q + \dim \text{Ker } q = \dim E$$
$$\dim E^\perp$$

Définition:

On dit que q est non dégénérée
lorsque $\text{Ker } q = \{\vec{0}\}$

Théorème 2:

Soit (b) la matrice associée à la forme quad. q dans une base de E , alors le rang de q est égal au rang de (b) .

En particulier :

si q est non dégénérée (b) est inversible et réciproquement.

$$\eta_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 1 & & 0 \\ & -1 & \\ 0 & & -1 \\ & & & -1 \end{pmatrix}$$

Remarque : toutes les métriques ne sont pas diagonalisables (Kerr, Eddington...).

Définition:

On dit que q est positive si $q(\vec{u}) \geq 0$
négative si $q(\vec{u}) \leq 0$

Inégalité de Cauchy-Schwarz

soit $b \in \mathcal{L}_s(E \times E, \mathbb{R})$ bilinéaire symétrique

et q f. q positive, alors on a:

$$\forall \vec{x}, \vec{y} \in E,$$

$$b(\vec{x}, \vec{y}) \leq |b(\vec{x}, \vec{y})| \leq \sqrt{q(\vec{x})} \cdot \sqrt{q(\vec{y})}$$

si q est non dégénérée positive

$$\sqrt{q(\vec{x})} = \|\vec{x}\| \text{ par définition}$$

Théorème et définition

Soit E e. v. muni d'une norme

l'application $d: E \times E \rightarrow \mathbb{R}_+$

$$(\vec{u}, \vec{v}) \mapsto d(\vec{u}, \vec{v}) = \|\vec{u} - \vec{v}\|$$

est nommée distance de E .

Remarque:

Un espace métrique (= muni d'une distance) est automatiquement un espace homogène car la distance est invariante par translation.

$$d(\vec{u}, \vec{v}) = d(\vec{u} + \vec{a}, \vec{v} + \vec{a})$$

C) Écriture tensorielle

1^{ère} convention d'Einstein :

E1 : dans tout monôme à plusieurs variables où pour 2 des variables l'une a un indice en haut et l'autre a le même indice en bas signifie la somme des monômes en question pour toute valeur de l'indice. Cet indice dit de sommation est qualifié de muet.

2^{ème} convention d'Einstein :

E2 : toute égalité dans laquelle les 2 membres comporte un même indice (non muet ou "libre") placé à la même hauteur est en fait un système composant d'autant d'égalité qu'il y a de valeur à cet indice :

ex: $x^k = -3(x^i)^2 g^k y_i \quad k=1,2$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x^1 = -3(x^1)^2 g^1 y_1 - 3(x^2)^2 g^1 y_2 \\ x^2 = -3(x^1)^2 g^2 y_1 - 3(x^2)^2 g^2 y_2 \end{cases}$$