

Mercrredi 20 novembre de l'an 2019

SAF, 18H Cours de Stéphane Mihajlovic.

Exemple 1: la métrique euclidienne
dans $\mathbb{R}^4$

$$\text{base: } \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

l'élément neutre est: $(b) = (Id) = (\delta_{ij})$

$$b(\vec{x}, \vec{y}) = {}^t(x) (\delta_{ij}) (y)$$

$$= (x_1 \dots x_4) \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y^1 \\ y^2 \\ y^3 \\ y^4 \end{pmatrix}$$

$$b(\vec{x}, \vec{y}) = x^i \delta_{ij} y^j$$

$$= x_j y^j$$

$$= (x_1 \dots x_4) \begin{pmatrix} y^1 \\ y^2 \\ y^3 \\ y^4 \end{pmatrix}$$

$(\delta_{ij} = 1 \text{ si } i=j, 0 \text{ sinon})$

Exemple 2 : la métrique de Minkowski

Soit une base $(\vec{e}_0, \vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$

telle que $b(\vec{e}_0, \vec{e}_0) = -1$

et $b(\vec{e}_i, \vec{e}_j) = \delta_{ij}$ pour $i, j = 1, 2, 3$

c'est un espace pseudo-euclidien (ou hyperbolique).

$$b(\vec{e}_\alpha, \vec{e}_\beta) = \eta_{\alpha\beta}$$

$$(\eta_{\alpha\beta}) = \begin{pmatrix} -1 & & & \\ & 1 & & \\ & & 1 & \\ & & & 1 \end{pmatrix}$$

Si $\vec{X} = {}^t(ct \ x^1 \ x^2 \ x^3)$ est un vecteur position dans l'espace-temps

$$q(\vec{X}) = b(\vec{X}, \vec{X}) = -c^2 t^2 + (x^1)^2 + (x^2)^2 + (x^3)^2$$

• les vecteurs isotropes sont tels que

$$\underline{q(\vec{X}) = 0}$$

$$\Rightarrow -c^2 t^2 + x^2 + y^2 + z^2 = 0$$

$\Rightarrow x^2 + y^2 + z^2 = c^2 t^2$ équation d'une
sphère de rayon ct

(sphère de lumière, la source étant en 0 à $t=0$).

Remarque: $\swarrow$ indice de ligne
 $x^i = P^i_j x'^j$
 $\nwarrow$ indice de colonne

$$x'^j = \left(P^i_j \right)^{-1} x^i$$

$$= \left(P^j_i \right) x^i$$

Si (P) est la matrice de passage de $(\vec{e}_i)$ à $(\vec{e}'_i)$
 alors (R) est la matrice de passage de $(\vec{e}'_i)$ à $(\vec{e}_i)$

$$b(\vec{x}, \vec{y}) = b_{ij} x^i y^j$$

$$= b_{ij} \left(P^i_k x'^k \right) \left(P^j_l y'^l \right)$$

Notation: $= b_{ij} P^i_k P^j_l x'^k y'^l = b'(\vec{x}', \vec{y}')$

indicielle: $b'_{kl} = b_{ij} P^i_k P^j_l = P^i_k b_{ij}$ $\Leftarrow$ pl

matricielle: $(b') = {}^t(P) (b) (P)$ avec la convention d'Einstein

2) Transformations orthogonales

Théorème et définition:

Soient (E, b) et (F, d) 2 espaces euclidiens. Une application orthogonale $l: E \rightarrow F$ est linéaire telle que:

- i) $\forall \vec{x}, \vec{y}, b(\vec{x}, \vec{y}) = d(l(\vec{x}), l(\vec{y}))$
 $\Leftrightarrow$ (conservation du produit scalaire)
- ii) l transforme toute base ortho-normée (O.n.) de E en une famille O.n. de F .
 $\Leftrightarrow$
- iii) $\|l(\vec{x})\|_d = \|\vec{x}\|_b$

Remarque 1:

Si l est bijective alors, en dim. finie, la famille O.n. de F est une base O.n. de F de même cardinal (nbre d'élément) que la base de E .

Définition:

Un opérateur orthogonal est un automorphisme orthogonal de E .

Remarque 2:

Si $\dim E = n$, l'ensemble des opérateurs orthogonaux de E forment pour la composition des applications un groupe

$O_n \subset GL_n$ appelé groupe orthogonal.

GL_n : groupe linéaire.

O_n : groupe orthogonal.

Théorème et définition:

Une matrice carrée (A) de format $n \times n$ à coefficient réel est la matrice d'une transformation orthogonale dans E de $\dim n$ ssi :

$$A^t A = {}^t A \cdot A = Id$$

$\Rightarrow$ l'inverse de A : $A^{-1} = {}^t A \Leftrightarrow A = {}^t(A^{-1})$

◁ Preuve :

$$(\vec{x} | \vec{y}) = {}^t(x)(y)$$

$$\text{alors } (x) = (A)(x') \text{ et } (y) = (A)(y')$$

$$\begin{aligned} {}^t(x)(y) &= {}^t(x') {}^t(A)(A)(y') \\ &= {}^t(x')(y') \\ &= {}^t(x')(\text{Id})(y') \end{aligned}$$

$$\Rightarrow {}^t(A)(A) = (\text{Id})$$

$$(A)^{-1} = {}^t(A)$$

L.P.E.F. ▷

$$\text{On a de plus } \det({}^tA \cdot A) = \det({}^tA) \cdot \det(A) = 1$$

$$\Rightarrow (\det A)^2 = \det(\text{Id}) = 1$$

$$\Rightarrow \boxed{\det A = \pm 1}$$

La partie de O_n constituée des matrices de déterminant $+1$ forment un sous-groupe de O_n appelé "groupe spécial orthogonal" noté :

$$\boxed{\begin{aligned} SO_n(\mathbb{R}) \\ = O_n^+(\mathbb{R}) \end{aligned}}$$

Détermination dans l'espace d'une matrice de rotation $\in SO_m(\mathbb{R})$ ($m=3$ $SO_3(\mathbb{R})$)

Soit une base de $\mathbb{R}^3$ $(\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$

Supposons que la rotation s'effectue autour de $\vec{e}_1 =$

$$(A) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & a & c \\ 0 & b & d \end{pmatrix} \quad (A)(\vec{e}_1) = \vec{e}_1$$

$$\begin{aligned} {}^t(A)(A) &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & a & b \\ 0 & c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & a & c \\ 0 & b & d \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & a^2+b^2 & ac+bd \\ 0 & db+ac & c^2+d^2 \end{pmatrix} = (\text{Id}) \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} a^2+b^2=1 & (1) \\ c^2+d^2=1 & (2) \\ ac+bd=0 & (3) \end{cases}$$

$$\Rightarrow a = \pm \cos \varphi, \quad b = \pm \sin \varphi$$

Cherchons la rotation de matrice (A)

telles que lorsque $\varphi \rightarrow 0$, $A \rightarrow Id$.

Cela implique que $a = \cos \varphi$. Choisissons
pour $b = +\sin \varphi$

$$(3) \Rightarrow \cos \varphi \cdot c + \sin \varphi \cdot d = 0 \\ \Rightarrow c = -d \tan \varphi$$

$$(2) \Rightarrow d^2 \tan^2 \varphi + d^2 = 1 \\ \Rightarrow d^2 (1 + \tan^2 \varphi) = 1 \\ d^2 = \frac{1}{1 + \tan^2 \varphi} = \frac{1}{\frac{1}{\cos^2 \varphi}} = \cos^2 \varphi$$

On choisit $d = +\cos \varphi$ (pour retrouver l' Id)
 $\Rightarrow c = -\sin \varphi$

$$\text{d'où : } (A) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \varphi & -\sin \varphi \\ 0 & \sin \varphi & \cos \varphi \end{pmatrix}$$

La forme la plus générale, une rotation
sera composée de :

$$(A_1) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & c\varphi & -s\varphi \\ 0 & s\varphi & c\varphi \end{pmatrix}, (A_2) = \begin{pmatrix} c\theta & 0 & -s\theta \\ 0 & 1 & 0 \\ s\theta & 0 & c\theta \end{pmatrix}, (A_3) = \begin{pmatrix} c\psi & -s\psi & 0 \\ s\psi & c\psi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$\begin{pmatrix} c\varphi = \cos \varphi \\ s\varphi = \sin \varphi \end{pmatrix}$ 8

C Structure de l'espace-temps

Definition:

on appelle espace affine E de direction F
un ensemble de "points" muni d'une
application :

$$\varphi: \mathcal{C} \times \mathcal{C} \rightarrow E$$

$$(M, N) \mapsto \varphi(M, N) = \vec{u} = \overrightarrow{MN}$$

a) φ est surjective mais M étant choisi, la restriction de φ à E :

$$\varphi_M: \mathcal{E} \rightarrow E$$

$$N \mapsto \varphi(M, N) = \varphi_M(N) = w$$

est bijective.

$$b) \varphi(M, P) + \varphi(P, N) = \varphi(M, N)$$

Commentaires :

1) φ étant surjective $\varphi(M, M)$ existe.

indépendamment de M , on pose $\varphi(M, M) = \begin{matrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{matrix}$

$$ii) \varphi(M, P) + \varphi(P, M) = \varphi(M, M) = \vec{0}$$

$$\varphi(M, P) = -\varphi(P, M)$$

φ est antisymétrique.

iii) L'ens. des couples (M, N) qui ont tous le même vecteur image peut être muni d'une relation d'équivalence

$$(M, N) \sim (P, Q) \text{ si } \varphi(M, N) = \varphi(P, Q) = \vec{v}$$

On écrit quand $\vec{MN} = \vec{PQ}$, (M, N, P, Q) forme un parallélogramme .

Définition :

Un repère de E est un couple formé de $(O, (\vec{e}_i))$.

si $\vec{u} = u^i \vec{e}_i$, alors $\varphi_O(M) = \varphi(O, M) = \vec{u}$
on peut dire que $(u^1, u^2, \dots, u^n)$ sont les coordonnées de M dans le repère.

Définition:

L'espace-temps de Minkowski est un espace affine associé à $\mathbb{R}^4$ muni de la métrique $(\eta_{\alpha\beta})$.

soit (M, N) 2 événements

$$\vec{MN} = \begin{pmatrix} c(t_N - t_M) \\ x_N - x_M \\ y_N - y_M \\ z_N - z_M \end{pmatrix}$$



si $\vec{ON} \rightarrow \vec{OM}$, alors $\vec{MN} \rightarrow d\vec{M}$ et on a

$$ds^2 = g(d\vec{M}) = -c^2 dt^2 + dx^2 + dy^2 + dz^2$$

$$(\eta_{\alpha\beta}) = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$