

Mercrèdi 27 novembre de l'an 2019

SAF, 18H, cours de Stéphanie Mihajlovic.

• $\vec{X}, \vec{Y}$ sont des quadri-vecteurs (4-vect.)

On cherche les transformations de composantes (Λ) préservant la métrique ($\eta_{\alpha\beta}$):

$$(\vec{X} | \vec{Y}) = {}^t(X) (\eta_{\alpha\beta}) (Y)$$

$$(X) = (\Lambda) (X')$$

$$(Y) = (\Lambda) (Y')$$

$$\Rightarrow (\vec{X} | \vec{Y}) = {}^t(X') {}^t(\Lambda) (\eta_{\alpha\beta}) (\Lambda) (Y')$$

$$\text{or } (\vec{X}' | \vec{Y}') = {}^t(X) (\eta_{\alpha\beta}) (Y)$$

$$\text{d'où } (\eta_{\alpha\beta}) = {}^t(\Lambda) (\eta_{\alpha\beta}) (\Lambda)$$

$$\Rightarrow -1 = [\det(\Lambda)]^2 (-1)$$

$$\Rightarrow [\det(\Lambda)]^2 = 1$$

On ne garde que les matrices (Λ) de det +1
car pour la composition elles forment un
groupe appelé "groupe propre de Lorentz" 1

$$\eta_{\alpha\beta} = \Lambda_{\alpha}^{\mu} \Lambda_{\beta}^{\nu} \eta_{\mu\nu}$$

en particulier $\eta_{00} = \sum_{\mu} \sum_{\nu} \Lambda_0^{\mu} \Lambda_0^{\nu} \eta_{\mu\nu}$

$$\eta_{00} = \sum_{\mu} \Lambda_0^{\mu} (\Lambda_0^0 \eta_{\mu 0} + \Lambda_0^1 \eta_{\mu 1} + \Lambda_0^2 \eta_{\mu 2} + \Lambda_0^3 \eta_{\mu 3})$$

$$\eta_{00} = \Lambda_0^0 (\Lambda_0^0 \eta_{00}) + \Lambda_0^1 (\Lambda_0^1 \eta_{11}) + \dots + \Lambda_0^3 (\Lambda_0^3 \eta_{33})$$

$$\eta_{00} = -(\Lambda_0^0)^2 + \sum_{i=1}^3 (\Lambda_0^i)^2 = -1$$

$$\Rightarrow (\Lambda_0^0)^2 = 1 + \sum_{i=1}^3 (\Lambda_0^i)^2$$

$$(\Lambda_0^0)^2 > 0$$

$\Rightarrow$ 2 cas possibles:

$$\Lambda_0^0 \in]-\infty; -1[\text{ ou bien } \Lambda_0^0 \in]1; +\infty[$$

On ne retient que le cas $\Lambda_0^0 > 1$
qui concernent les matrices de Lorentz
ortho-chrones qui ont la propriété de
conserver le "sens" de temps.

Considérons le 4-vecteur $\vec{X}$ tel que

$$X^0 = c \Delta t, X^1 = \Delta x, X^2 = \Delta y, X^3 = \Delta z$$

dans R .

le même 4-vecteur vu de R' :

$$\vec{X}' = {}^t(X^{0'}, X^{1'}, X^{2'}, X^{3'})$$

$$X^0 = \sum_{\alpha} \Lambda_{\alpha}^0 X'^{\alpha}$$

Si on suppose les 2 événements au m^{ème} endroit
dans $R' \Rightarrow X'^i = 0 \quad i = 1, 2, 3$
et $X^0 = \Lambda_0^0 X'^0$

$$\text{or } \Lambda_0^0 > 1 \text{ donc } X^0 > X'^0$$

Si $X'^0 > 0$ alors nécessairement $X^0 > 0$

• Les matrices (Λ) à la fois propres et orthocrones forment un sous-groupe du groupe propre de Lorentz appelé "groupe spécial de Lorentz".

• le groupe propre de Lorentz se note : $SO(3,1)$ ₃
(c'est un groupe spécial pseudo-orthogonal).

On peut envisager plusieurs types de matrices (Λ):

1)
$$(\Lambda) = \begin{pmatrix} +1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a & c \\ 0 & 0 & b & d \end{pmatrix} \begin{matrix} ct \\ x \\ y \\ z \end{matrix}$$
 : rotation d'espace autour de Ox avec sens du temps conservé.

2) On peut envisager une matrice (Λ) conservant 2 axes d'espace:

$$(\Lambda) = \begin{pmatrix} a & c & 0 & 0 \\ b & d & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$${}^t(\Lambda)(\eta_{\alpha\beta})(\Lambda) = (\eta_{\alpha\beta})$$

par blocs on a: $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

$$\begin{pmatrix} -a & b \\ -c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b^2 - a^2 & bd - ac \\ bd - ac & d^2 - c^2 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} b^2 - a^2 = -1 & (1) \\ bd = ac & (2) \\ d^2 - c^2 = +1 & (3) \end{cases} \quad b^2 d^2 = a^2 c^2$$

$$\Rightarrow a^2 c^2 = (a^2 - 1)(c^2 + 1)$$

$$= a^2 c^2 + a^2 - c^2 - 1$$

$$\Rightarrow \begin{cases} a^2 - c^2 = 1 \\ d^2 = a^2 \end{cases}$$

$$\Rightarrow a = d \text{ et } b = c$$

$$\text{ou bien } a = -d \text{ et } b = -c$$

$$\text{On a } b^2 - a^2 = 1, \quad b^2 = a^2 - 1$$

$$\text{Comme } b^2 > 0 \quad \begin{cases} a^2 > 1 \\ a^2 - c^2 = 1 \end{cases}$$

$$\text{On pose } a = \cosh \varphi \text{ et } c = \sinh \varphi$$

$$\text{on a le choix: } \begin{pmatrix} \cosh \varphi & \sinh \varphi \\ \sinh \varphi & \cosh \varphi \end{pmatrix} \text{ ou } \begin{pmatrix} \cosh \varphi & \sinh \varphi \\ -\sinh \varphi & -\cosh \varphi \end{pmatrix}$$

pour $\varphi = 0$ on a (Id) $\Rightarrow$ on choisit la 1^{eme}

On pose $\gamma = \cosh \varphi \Rightarrow \sinh \varphi = \gamma \beta$

$$\beta = \frac{v}{c}$$

$$\tanh \varphi = \frac{v}{c}$$

$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}}$$

On interprète $\varphi = \frac{w}{c}$ où w est la rapidité.

On va interpréter dw comme la vitesse infiniment petite d'une particule P en mouvement selon Ox vu de R' .

$$\frac{v}{c} = \tanh \varphi = \frac{e^\varphi - e^{-\varphi}}{e^\varphi + e^{-\varphi}} = \frac{e^{2\varphi} - e^{-2\varphi}}{e^{2\varphi} + e^{-2\varphi}} = \frac{e^{2\varphi} - 1}{e^{2\varphi} + 1}$$

$$x = \varphi$$

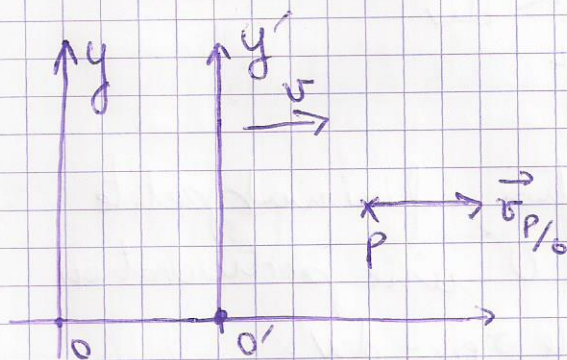
$$\Rightarrow \frac{v}{c} (e^{2x} + 1) = e^{2x} - 1$$

$$e^{2x} \left(1 - \frac{v}{c}\right) = \left(1 + \frac{v}{c}\right)$$

$$e^{2x} = \frac{c+v}{c-v} \Leftrightarrow 2x = \ln\left(\frac{c+v}{c-v}\right) = 2\frac{w}{c}$$

$$\Rightarrow 2 \frac{dw}{c} = \frac{c-v}{c+v} \left(\frac{dv(c-v) + dv(c+v)}{(c-v)^2} \right)$$

$$2 \frac{dw}{c} = \frac{2 d\gamma c}{(c+v)(c-v)} \Rightarrow \left[\frac{dw}{dv} = \frac{1}{\left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)} \right]$$



En mécanique classique: $\vec{v}_{P/O'} + \vec{v} = \vec{v}_{P/O}$

En R.R. $v_{P/O} = \frac{v + v_{P/O'}}{1 + \frac{\beta}{c} v_{P/O'}}$

$$\begin{aligned} \Delta v_{P/O} &= v_{P/O} - v \\ &= \frac{v + v_{P/O'} - v - \beta^2 v_{P/O'}}{1 + \frac{\beta}{c} v_{P/O'}} \end{aligned}$$

$$\Delta v_{P/O} = \frac{(1 - \beta^2) v_{P/O'}}{1 + \frac{\beta}{c} v_{P/O'}}$$

$$\frac{\Delta v_{P/O}}{v_{P/O'}} = \frac{(1 - \beta^2)}{1 + \frac{\beta}{c} v_{P/O'}}$$

$$\text{Si } \gamma_{P/0} \rightarrow 0 \quad \frac{\Delta \gamma_{P/0}}{\gamma_{P/0}} \xrightarrow{\leftarrow dv} 1 - \beta^2$$

$$\text{or } \frac{dv}{dw} = 1 - \beta^2 \quad \nwarrow dw$$

Avec une perturbation infiniment petite de v , on a va de 0 une perturbation infiniment petite de $\gamma_{P/0} = dw$.

• Pour avoir $(\Lambda)^{-1}$ dans l'espace de Minkowski il faut changer v en $-v \Rightarrow \beta$ en $-\beta$

$$(\Lambda)^{-1} = \begin{pmatrix} \cosh \varphi & -\sinh \varphi & 0 & 0 \\ -\sinh \varphi & \cosh \varphi & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$(\Lambda) = \begin{pmatrix} \cosh \varphi & \sinh \varphi & 0 & 0 \\ \sinh \varphi & \cosh \varphi & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Notons que $(\Lambda)^{-1} \neq {}^t(\Lambda)$ dans l'espace de Minkowski.