

II Transformations infinitésimales - Algèbre tensorielle

[A] Différentielle d'une fonction $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$

$$M(x^i)_{1 \leq i \leq n} \longrightarrow M'(x^{j'})_{1 \leq j' \leq m}$$

$$x^{j'} = f(x^1, \dots, x^n) \text{ pour } j' = 1, \dots, m$$

$f(\vec{OM})$ est un vecteur $\vec{OM}'$ de $\mathbb{R}^m$ de composantes $f^{j'}$.

$$\vec{x} = \vec{OM} \quad \vec{x}' = \vec{OM}' \quad \vec{x}_0 = \begin{pmatrix} x_0^1 \\ \vdots \\ x_0^n \end{pmatrix}$$

vecteur position d'un point $M_0 \in \mathbb{R}^n$ non isolé
($U \in \mathbb{R}^n \quad V \subset \mathbb{R}^m$)

il existe un voisinage ouvert U_0 de M_0 , tel que $U_0 \subset U$.

Définition:

On dit que f est différentiable en $M_0 \in M$ si $\forall \vec{x} \in U$ il existe une application linéaire $Df_{\vec{x}_0}$ et une application

$\varepsilon : M \times M \rightarrow \mathbb{R}^m$ telles que

$$f(\vec{x}) = f(\vec{x}_0) + Df_{\vec{x}_0}(\vec{x} - \vec{x}_0) + \varepsilon(\vec{x}_0, \vec{x}) \cdot \|\vec{x} - \vec{x}_0\|$$

avec $\lim_{\vec{x} \rightarrow \vec{x}_0} \varepsilon = 0$

$Df_{\vec{x}_0}$ est appelée différentielle de f en $\vec{x}_0$

et dans le cas où $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ on la note

$$\begin{aligned} df_{\vec{x}_0} &= \left. \frac{\partial f}{\partial x^i} \right|_{\vec{x}_0} dx^i \\ &= g^i df_{\vec{x}_0} \cdot dx^i \end{aligned}$$

$$\bullet \quad x^j = f^j(\vec{x}) = f^j(\vec{x}_0) + d\left\{ \frac{\partial f^j}{\partial x^i}(\vec{x} - \vec{x}_0) + \varepsilon^j(\vec{x}_0, \vec{x}) \right\} \times \|\vec{x} - \vec{x}_0\|_{\mathbb{R}^n}$$

la forme linéaire $df_{\vec{x}_0}^j$ est appelée covecteur gradient de f^j en $\vec{x}_0$.

Dans le cas général:

$$Df_{\vec{x}_0} = \begin{pmatrix} \frac{\partial f^1}{\partial x^1}, \dots, \frac{\partial f^1}{\partial x^n} \\ \vdots \\ \frac{\partial f^m}{\partial x^1}, \dots, \frac{\partial f^m}{\partial x^n} \end{pmatrix}_{\vec{x}_0} = (J)_{\vec{x}_0}$$

$Df_{\vec{x}_0}$ est la matrice jacobienne de f en $\vec{x}_0$.

• si $\vec{x} \rightarrow \vec{x}_0$, on peut considérer le vecteur infinitésimal $d\vec{x}$, $f(\vec{x}) = f(\vec{x}_0)$ par continuité qui donne:

$$d\vec{x}' = \lim_{\vec{x} \rightarrow \vec{x}_0} (\vec{x}' - \vec{x}_0') \begin{pmatrix} dx^{1'} \\ \vdots \\ dx^{m'} \end{pmatrix} = (J)_{\vec{x}_0} \begin{pmatrix} dx^1 \\ \vdots \\ dx^n \end{pmatrix}$$

$$dx^{j'} = \frac{\partial x^{j'}}{\partial x^i} dx^i, \quad j = 1, \dots, m$$

en notation indicelle