

Mercrèdi 29 janvier de l'an 2020

SAF, 18H, cours de Stéphane Mihajlovic

$$d\vec{X}' = (J)_{\vec{x}_0} d\vec{X}$$

$$\begin{pmatrix} dx^{1'} \\ \vdots \\ dx^{m'} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial x^{1'}}{\partial x^1} & \dots & \frac{\partial x^{1'}}{\partial x^m} \\ \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial x^{m'}}{\partial x^1} & \dots & \frac{\partial x^{m'}}{\partial x^m} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} dx^1 \\ \vdots \\ dx^m \end{pmatrix}$$

$$x^{i'} = f(x^1, \dots, x^m)$$

$$dx^{i'} = \frac{\partial x^{i'}}{\partial x^i} dx^i, \quad \left(\frac{\partial x^{i'}}{\partial x^i} \right) = (J)_{\vec{x}_0}$$

Considérons 2 changements de coordonnées successifs:

$$x^i \xrightarrow{f} f^j(x^i) \xrightarrow{g} g^h[f^j(x^i)]$$

$$i = 1, \dots, m$$

$$j = 1, \dots, m$$

$$h = 1, \dots, p$$

$$\begin{cases} d\vec{X} = (P) d\vec{X}' \\ d\vec{X}' = (J)_{\vec{x}_0} d\vec{X} \end{cases}$$

Par composition on définit un chgt
de coordonnées de $\mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^p$
notée $g \circ f$

$$\begin{aligned} \text{On a: } d(g \circ f)^h(x^i) &= \frac{\partial g^h}{\partial f^j} df^j \\ &= \frac{\partial g^h}{\partial f^j} \times \frac{\partial f^j}{\partial x^i} \times dx^i \end{aligned}$$

Théorème de composition :

- si g est une application de $\mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^p$
différentiable en $f(\vec{x}_0)$ et si $f: \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n$
est diff. en $\vec{x}_0$, alors $g \circ f$ est diff. en $\vec{x}_0$
et on a :

$$(J)_{g \circ f(\vec{x}_0)} = (J)_{g(f(\vec{x}_0))} \times (J)_{f(\vec{x}_0)}$$

- Si $n = m = p$ et si $g \circ f = \text{Id}_{\mathbb{R}^n}$

$$Dg_{f(\vec{x}_0)} \circ Df_{\vec{x}_0} = D \text{Id}_{\vec{x}_0} = \text{Id.}$$

Donc en notant $g = f^{-1}$ et si $\det(J)_{f, \vec{x}_0} \neq 0$

alors $\left(D \frac{f}{\vec{x}_0}\right)^{-1}$ existe et a pour matrice

$$(J)^{-1}_{f, \vec{x}_0}.$$

On a :

$$dx^{j'} = \frac{\partial x^{j'}}{\partial x^i} dx^i \quad \text{or} \quad dx^{j'} = \delta^j_e dx^e$$

$$\frac{dx^{j'}}{dx^{e'}} = \delta^j_e \quad \text{or on a aussi :}$$

$$\frac{dx^{j'}}{dx^{e'}} = \frac{\partial x^{j'}}{\partial x^i} \frac{\partial x^i}{\partial x^{e'}} = \delta^j_e$$

ce qui montre que les matrices jacobiniennes de f et f^{-1} sont inverses l'une de l'autre.

Remarque :

l'inter version $\frac{\partial x^{j'}}{\partial x^i} \leftrightarrow \frac{\partial x^i}{\partial x^{j'}}$ n'est pas une

transposition (car en écriture indiciale

$$\frac{\partial x^{j'}}{\partial x^i}$$

j : indice de ligne

i : indice de colonne

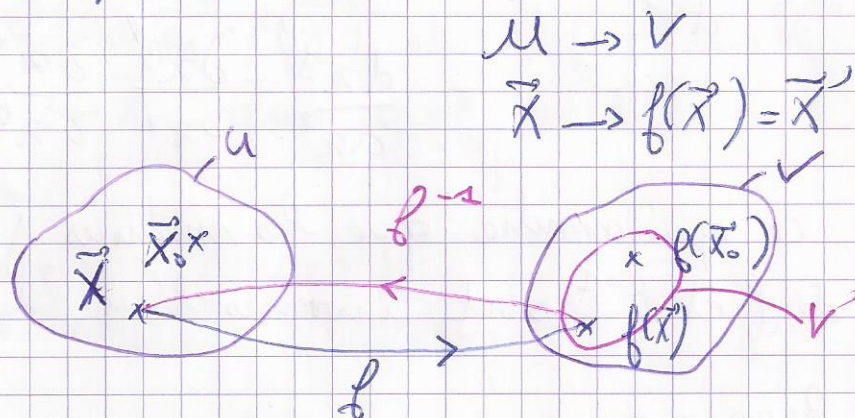
Théorème d'inversion locale :

soit $f: U \subset \mathbb{R}^n \rightarrow V \subset \mathbb{R}^n$

$\vec{x}_0 \in U$ tel que $(J)_{\vec{x}_0}$ soit inversible
alors il existe un voisinage V' de $\vec{x}'_0$
 $\vec{x}'_0 = f(\vec{x}_0)$, $V' \subset V$

et une application inverse f^{-1}
définie sur V' à valeurs dans U
telle que f^{-1} soit différentiable en $\vec{x}_0$ et

$$\forall \vec{x}' \in V', f^{-1}(\vec{x}') = \vec{x}$$



Définition:

Une application $f: U \rightarrow V$ ouverts de $\mathbb{R}^n$ continue telle que f^{-1} soit également continue sur V , s'appelle un homéomorphisme.

Définition:

Une application $f: U \rightarrow V$ homéomorphisme tel que f et f^{-1} soient diff. se nomme difféomorphisme.

2) Compatibilité avec la métrique

E^* est le dual de E supposé de dim. n ,
de base (e^{*i}) , $i = 1, \dots, n$

telle que $e^{*i}(\vec{x}) = x^i$
 $\vec{x} \in E$ et $\vec{x} \in (E^*)^*$

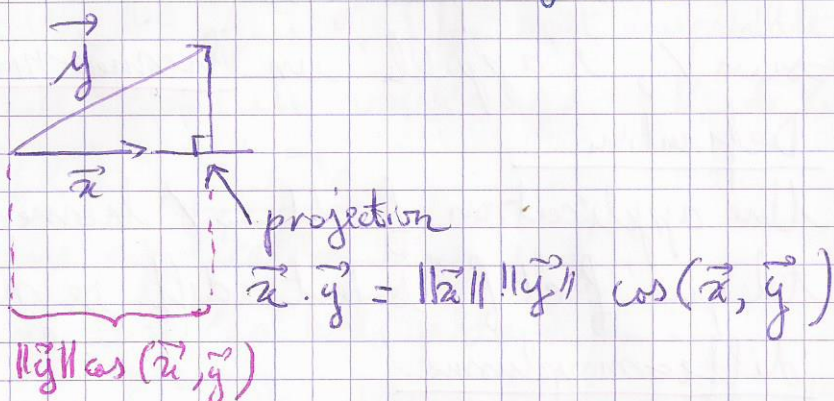
soit $g_{ij} = (\vec{e}_i | \vec{e}_j) = b(\vec{e}_i, \vec{e}_j)$ de
matrice (g)

Considérons l'application projecteur :

$$\varphi: E \rightarrow E^*$$

$$\vec{x} \mapsto \varphi(\vec{x}) = \varphi_{\vec{x}}^*$$

telle que $\varphi_{\vec{x}}^*(\vec{y}) = (\vec{x} | \vec{y})$
 $= {}^t(x)(g)(y)$



Par def. on pose $\varphi_{\vec{e}_i}^*(\vec{y}) = y_i$, pour $\vec{x} = \vec{e}_i$

$\forall \vec{y} \in E, \vec{y} = y^j \vec{e}_j$

et $\varphi_{\vec{e}_i}^*(\vec{y}) = (\vec{e}_i | \vec{y}) = y_i$

or $\varphi_{\vec{e}_i}^*(y^j \vec{e}_j) = y^j \varphi_{\vec{e}_i}^*(\vec{e}_j)$
 $= y^j (\vec{e}_i | \vec{e}_j)$
 $= y^j g_{ij}$

$\Rightarrow y_i = y^j g_{ij}$ tout se passe
 comme si le tenseur g_{ij} permettait
 de "descendre" l'indice.

Soit $\underline{x}^* = x_i e^{*i}$ et $(\underline{x}^*)$ la matrice ligne
 $(x_1, \dots, x_n)$. Matriciellement $(\underline{x}^*) = {}^t(g)(x)$

$$(\underline{x}^*) = {}^t(x)(g) \quad ({}^t(g) = (g) \text{ car symétrique})$$

Multiplions membre à membre par
 $(g)^{-1}$:

$$(\underline{x}^*)(g)^{-1} = {}^t(x)$$

$$\Leftrightarrow (x) = {}^t(g)^{-1} {}^t(\underline{x}^*)$$

$(g)^{-1}$ a pour coefficients $(g^{ij}) = {}^t(g)^{-1} = (g)^{-1}$
 ${}^t(M)^{-1}$: (matrice contra-gradiente)

Donc en composante on a établi que:

$$x^i = g^{ij} x_j$$

→ montée d'indice

$$\begin{aligned}
 \bullet \quad (d\vec{X} | d\vec{Y}) &= g(d\vec{X}, d\vec{Y}) \\
 &= {}^t(d\vec{X}) (g_{ij})_{\vec{x}_0} (d\vec{Y}) \\
 &= {}^t((J)_{\vec{x}_0}^{-1}(d\vec{X}')) (g_{ij})_{\vec{x}_0} (J)_{\vec{x}_0}^{-1}(d\vec{Y}') \\
 (d\vec{X}' | d\vec{Y}') &= {}^t(d\vec{X}') [{}^t(J)_{\vec{x}_0}^{-1} (g_{ij})_{\vec{x}_0} (J)_{\vec{x}_0}^{-1}] (d\vec{Y}') \\
 &= {}^t(d\vec{X}') (g')_{\vec{x}_0} (d\vec{Y}')
 \end{aligned}$$

$$\text{d'où: } (g')_{\vec{x}_0} = {}^t(J)_{\vec{x}_0}^{-1} (g) (J)_{\vec{x}_0}^{-1}$$

$$g'_{kl} = \frac{\partial x^i}{\partial x'^k} \cdot \frac{\partial x^j}{\partial x'^l} \cdot g_{ij}$$

$$(dx_1^*, \dots, dx_n^*) = (dx_1^*, \dots, dx_n^*) \begin{pmatrix} \frac{\partial x^1}{\partial x'^1} & \dots & \frac{\partial x^1}{\partial x'^n} \\ \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial x^n}{\partial x'^1} & \dots & \frac{\partial x^n}{\partial x'^n} \end{pmatrix}$$

Exemple: (J)
 $(x, y) \xrightarrow{(J)^{-1}} (r, \theta)$ coordonnées polaires
 On a: $r = \sqrt{x^2 + y^2}$, $\theta = \text{Arctan}\left(\frac{y}{x}\right) \pm \pi$

$$x = r \cos \theta, \quad y = r \sin \theta$$

$$(J)^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{\partial x}{\partial r} & \frac{\partial x}{\partial \theta} \\ \frac{\partial y}{\partial r} & \frac{\partial y}{\partial \theta} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \theta & -r \sin \theta \\ \sin \theta & r \cos \theta \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow (J) = \begin{pmatrix} r \cos \theta & r \sin \theta \\ -\sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix} \cdot \frac{1}{\det(J)^{-1}}$$

Inversion de

matrice (2x2): $\begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} d & -c \\ -b & a \end{pmatrix} = \det(J)^{-1} = (ad - bc) Id$

$$\det(J)^{-1} = r$$

$$\times Id = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$(J) = \begin{pmatrix} \cos \theta & \sin \theta \\ -\frac{\sin \theta}{r} & \frac{\cos \theta}{r} \end{pmatrix}$$

$$d\vec{M} = dx \vec{e}_x + dy \vec{e}_y, \quad \vec{e}_x = \vec{i}, \quad \vec{e}_y = \vec{j}$$

fixons θ et faisons varier r seul

$$\vec{e}_r = \frac{\partial \vec{M}}{\partial r} = \frac{\partial x}{\partial r} \vec{e}_x + \frac{\partial y}{\partial r} \vec{e}_y$$

$$\vec{e}_r = \vec{i} \cos \theta + \vec{j} \sin \theta$$

$$\vec{e}_\theta = -\sin \theta \vec{i} + \cos \theta \vec{j}$$

ce sont
les colonnes
de $(J)^{-1}$

$$(x') = (J)^{-1}(x)$$

On peut résoudre ce syst. d'éq. en $\vec{e}_x = \vec{i}$ et $\vec{e}_y = \vec{j}$.

$$\text{On trouve } \begin{cases} \vec{e}_r = \cos\theta \vec{e}_x - \frac{\sin\theta}{r} \vec{e}_\theta \\ \vec{e}_\theta = \sin\theta \vec{e}_x + \frac{\cos\theta}{r} \vec{e}_\theta \end{cases}$$

Notons que dans la nouvelle base on a :

$$\|\vec{e}_r\| = 1 \text{ et } \|\vec{e}_\theta\| = r$$

$$\begin{aligned} \vec{dM} &= dr \vec{e}_r + d\theta \vec{e}_\theta \\ &= dr \vec{u}_r + r d\theta \vec{u}_\theta \end{aligned}$$

$$\text{avec } \begin{cases} \vec{u}_r = \vec{e}_r \\ \vec{u}_\theta = \frac{\vec{e}_\theta}{r} \end{cases}$$

$$\rightarrow \vec{dM}^2 = dr^2 + r^2 d\theta^2$$

$$\vec{dM}^2 = dx^2 + dy^2 = {}^t(dM)(g_{ij})(dM)$$

$$(g_{ij}) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (g'_{ij}) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & r^2 \end{pmatrix}$$

$$\text{On a : } (g') = {}^t(J)^{-1} (g) (J)^{-1}$$

Composantes covariantes :

$$d\vec{M}^* = (dx \ dy)$$

$$d\vec{M}^{*'} = (dr \ r^2 d\theta) \leftarrow (\vec{e}_r | d\vec{M}')$$

$$\leftarrow (\vec{e}_\theta | d\vec{M}')$$

$$(\underline{x}^*) = {}^t(x) (g) \quad \text{et} \quad (\underline{x}^{*'}) = {}^t(x') (g')$$

$$(\underline{x}^{*'}) = (\underline{x}^*) (J)^{-1}$$

$$(dr \ r^2 d\theta) = (dx \ dy) \begin{pmatrix} \cos\theta & -r \sin\theta \\ \sin\theta & r \cos\theta \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} dr = \cos\theta dx + \sin\theta dy \\ r^2 d\theta = -dx r \sin\theta + dy r \cos\theta \end{cases}$$

$$d\vec{M}^* =$$

$$d\vec{M} = dx \vec{i} + dy \vec{j}$$

$$d\vec{M} \begin{pmatrix} dx \\ dy \end{pmatrix}$$

$$d\vec{M}' \begin{pmatrix} dr \\ d\theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} dr \\ r^2 d\theta \end{pmatrix}$$

$\vec{e}_r, \vec{e}_\theta \quad \vec{e}_r, \vec{e}_\theta$