

Mardi 5 février de l'an 2020

SAF, 18H, Cours de Stéphane Milojkovic

B) Tenseurs : aspects algébriques

1) Définition

Soit 2 E.V. E_1, E_2 de dim. n_1 et n_2
On appelle produit tensoriel de E_1, E_2
un e.v. de dim. $n_1 \times n_2$ muni
d'une application telle que :

$$\begin{aligned} \pi : E_1 \times E_2 &\rightarrow E_1 \otimes E_2 \\ (\vec{v}_1, \vec{v}_2) &\mapsto \pi(\vec{v}_1, \vec{v}_2) = \vec{v}_1 \otimes \vec{v}_2 \end{aligned}$$

a) $\otimes$ est distributif par rapport à l'addition des vecteurs

b) $\otimes$ est associatif par rapport à la multiplication externe :

$$\begin{aligned} (\lambda \vec{v}_1) \otimes \vec{v}_2 &= \lambda (\vec{v}_1 \otimes \vec{v}_2) \\ \vec{v}_1 \otimes (\lambda \vec{v}_2) &= \lambda (\vec{v}_1 \otimes \vec{v}_2) \end{aligned}$$

c) Si p vecteurs de E_1 sont libres et q vect. de E_2 aussi, alors les $p \times q$ produits tensoriels formés à partir de $(\vec{e}_1, \dots, \vec{e}_p)$ de E_1 et $(\vec{d}_1, \dots, \vec{d}_q)$ de E_2 : $\vec{e}_i \otimes \vec{d}_j$ forment une famille libre.

Théorème :

Si $(\vec{e}_i)_{1 \leq i \leq m_1}$ est une base de E_1 et $(\vec{d}_j)_{1 \leq j \leq m_2}$ est une base de E_2 , alors on a :

$$\vec{V}_1 \otimes \vec{V}_2 = \sum_i \sum_j v_1^i v_2^j \vec{e}_i \otimes \vec{d}_j$$

et la famille (double) $\vec{e}_i \otimes \vec{d}_j$ est une base de $E_1 \otimes E_2$.

Preuve :

Chacun des produits $\vec{e}_i \otimes \vec{d}_j$ est un tenseur ($\in E_1 \otimes E_2$), notons le $\vec{v}_{ij}$

La famille $(\overline{v}_{ij})$ est libre par construction;
d'après les axiomes,

$$\sum_i V_1^i \vec{e}_i \otimes \sum_j V_2^j \vec{d}_j =$$

$$\sum_i \sum_j V_1^i V_2^j \overline{v}_{ij}.$$

Donc les produits $V_1^i V_2^j$ constituent
les composantes de $\vec{v}_1 \otimes \vec{v}_2$ dans la
base $(\overline{v}_{ij})$ qui a $m_1 m_2$ éléments
exactement.

Réciproquement : la loi de composition
définie par :

$$\vec{v}_1 \otimes \vec{v}_2 = \sum_i \sum_j V_1^i V_2^j \overline{v}_{ij}$$

1) Les ^{l'un} mêmes $V_1^i V_2^j$ sont linéaires
selon l'un ou l'autre des arguments.

$$\begin{aligned} \text{par ex: } V_1^i (V_2^j + V_2^{j'}) &= \overline{v}_{ij} + \overline{v}_{ij'} \\ &= V_1^i V_2^j \overline{v}_{ij} + V_1^i V_2^{j'} \overline{v}_{ij'} \end{aligned}$$

2) Soient $(\vec{x}_i)$ et $(\vec{y}_j)$ 2 bases arbitraires de E_1 et E_2 respectivement.

on a pour bases $(\vec{e}_k)$ et $(\vec{d}_\ell)$ dans lesquelles sont exprimés $\vec{V}_1$ et $\vec{V}_2$:

$$\vec{e}_k = p_k^i \vec{x}_i, \quad \vec{d}_\ell = q_\ell^j \vec{y}_j$$

$$\begin{aligned} T = t^{kl} \vec{V}_{kl} &= t^{kl} \vec{e}_k \otimes \vec{d}_\ell \\ &= t^{kl} [p_k^i \vec{x}_i \otimes q_\ell^j \vec{y}_j] \\ &= t^{kl} p_k^i q_\ell^j (\vec{x}_i \otimes \vec{y}_j) \end{aligned}$$

• Si $T=0$, tous les t^{kl} sont nuls et alors la famille $(\vec{x}_i \otimes \vec{y}_j)$ est libre (et génératrice par construction).

L. P. E. F.

Pour 1): l'ens. des tenseurs $E_1 \otimes E_2$ définis par $\vec{V}_1 \otimes \vec{V}_2$ n'épuise pas tous les tenseurs de $E_1 \otimes E_2$, ce n'en sont que des tenseurs particuliers.

• $\dim E_1 \otimes E_2 = n_1 \times n_2$

• Soient $n_1 \times n_2$ nombres t^{ij} , cherchons à leur associer les $n_1 + n_2$ nombres V_1^i et V_2^j tels que $\vec{T} = V_1^i \vec{e}_i$ et $\vec{T} = V_2^j \vec{d}_j$

On a par identification $n_1 \times n_2$ éq. pour $n_1 + n_2$ inconnues.

la différence : $n_1 \cdot n_2 - (n_1 + n_2) = (n_1 - 1)(n_2 - 1) - 1$

et cette diff. est > 0 dès que $n_1 \geq 2$ et $n_2 \geq 2$ ou bien $n_1 \geq 2$ et $n_2 \geq 2$

Donc on a plusieurs éq. de compatibilité à satisfaire qui restreignent les sol. V_1^i et V_2^j

Résumé: l'ens. des produits $\vec{V}_1 \otimes \vec{V}_2$ est strictement contenu dans l'ens. $E_1 \otimes E_2$. Les tenseurs de $E_1 \otimes E_2$ qui s'écrivent sous la forme $V_1^i V_2^j \vec{e}_{ij}$ sont appelés "tenseurs décomposés" de $E_1 \otimes E_2$.

Remarque :

• Si $E_1 \neq E_2$ il est clair que $E_1 \otimes E_2 \neq E_2 \otimes E_1$
donc le produit tensoriel n'est pas commutatif.

• On soit que E^* est de n dimension que E .

(e^{*i}) base de E^* est telle que $e^{*i}(\vec{e}_j) = \delta_{ij}$

Formellement on pourra définir $E_1^* \otimes E_2^*$
et dans le cas du n espace ou de son dual
on définira des puissances tensorielles :

$$E^{\otimes p} = E \otimes \dots \otimes E$$

$$\text{et } E^{*\otimes q} = E^* \otimes \dots \otimes E^*$$

Définition :

On appelle tenseur d'espèce (p, q)
tout élément de l'espace produit $E^{\otimes p} \otimes E^{*\otimes q}$
dans un ordre déterminé.

$$\text{ex: } E \otimes E \otimes E^* \neq E \otimes E^* \otimes E$$

2) Opérations et critères de tensorialité

a) Égalité :

par ex U et $V \in E \otimes E^* \otimes E$

$$U = u^i_k{}^j \vec{e}_i \otimes e^{*k} \otimes \vec{e}_j$$

$$V = v^l_m{}^n \vec{e}_l \otimes e^{*n} \otimes \vec{e}_m$$

$U = V$ si $\forall i, j, k, u^i_k{}^j = v^i_k{}^j$

b) somme et produit par un nombre

$$T = \alpha U + \beta V \in E \otimes E^* \otimes E$$

$$t^i_k{}^j = \alpha u^i_k{}^j + \beta v^i_k{}^j$$

Cela signifie que le produit tensoriel d'espaces égaux à E ou à son dual E^* forme un e.v.

c) multiplication tensorielle :

par ex : $U = u^i_j{}^k \vec{e}_i \otimes \vec{e}_j \otimes e^{*k}$

et $V = v_p{}^q e^{*p} \otimes \vec{e}_q$

Dans le produit de $E^{\otimes 2} \otimes E^*$ par $E^* \otimes E$
il correspond les éléments de l'espace
 $E^{\otimes 2} \otimes E^{*\otimes 2} \otimes E$ tels que :

$$T = U \otimes V = t^{ij}_{hp} \vec{e}_i \otimes \vec{e}_j \otimes e^*_{*h} \otimes e^{*p} \otimes e_q$$

avec $t^{ij}_{hp} = u^{ij}_h v_p$

d) Contraction :

$u = (u^{ijk}_p)$ on choisit un couple d'indice $\neq$ (l'un contravariant, l'autre covariant)
Par ex. j et l .

On obtient un nouveau tenseur où
les composantes sont des sommes pour $j=l$

$$w^{ik} = \left(\sum_j \right) u^{ijk}_j$$

$$= u^{ik}_1 + u^{ik}_2 + \dots + u^{ik}_n$$

Au départ si on a un tenseur d'ordre $p+q$,
on obtient par contraction un tenseur d'ordre
 $p+q-2$.

e) Par ex: $t_{lp}^{ij} q = u_{lk}^{ij} v_p^k$

alors le produit contracté sur k et q

donne: $\sum_k t_{lp}^{ij} k = u_{lk}^{ij} v_p^k = w_{lp}^{ij}$

Exemple: le produit scalaire
 $(\vec{X} | \vec{Y}) = {}^t(\vec{X})(g)(\vec{Y})$

$$(\underline{X}^*) = {}^t(X)(g)$$

$$(\vec{X} | \vec{Y}) = (\underline{X}^*)(\vec{Y}) = x_i y^i$$

avec $x_i = g_{ij} x^j$ $E^* \otimes E \rightarrow \mathbb{R}$ (contracté)

f) Etant donné une famille de nombres,
 par ex. les n^2 nombres t_{ij}^k
 $i, j, k \in \{1, \dots, n\}$

A quelle condition peut-on affirmer que
 ce sont les composantes d'un tenseur
 $E^{\otimes 2} \otimes E^*$?

La réponse est fournie par un critère de tensorialité.

si $(\vec{e}_i)_{1 \leq i \leq n}$ et $(\vec{e}'_j)_{1 \leq j \leq n}$ sont 2 bases de E telles que $\vec{e}'_j = p_j^i \vec{e}_i$ où $(p) = (p_j^i)$

et la matrice de passage et $(R) = (r_i^j)$

telles que $\vec{e}_i = r_i^j \vec{e}'_j$

alors chaque indice cov. se transforme comme une composante d'une forme linéaire $f_j^* = p_j^i f_i^*$ et chaque indice

contravariant se transforme comme les composantes d'un vecteur.

$$T = t_{ij}^k e^* \otimes e^* \otimes e = t_{lm}^n e'^* \otimes e'^* \otimes e'_n$$

$$e^* = p_l^i e'^*$$

$$e^* = p_m^j e'^*$$

$$e_k = r_k^n e'_n$$

$$\Rightarrow t_{lm}^n = t_{ij}^k p_l^i p_m^j r_k^n$$

Critère de tensorialité

• symétrique: $t_{ij} = t_{ji}$

• anti-symétrique: $t_{ij} = -t_{ji}$

Exemple:

Vérifions que δ_{ij}^i est un tenseur
(de Kronecker) mais pas δ_{ij} .

Le critère de tensorialité est:

$$\delta_{\ell}^{ik} \vec{e}_k \otimes e^{*\ell} = \delta_j^i \vec{e}_i \otimes e^{*j} \\ = \delta_j^i \Omega_i^k p_\ell^j \vec{e}_k \otimes e^{*\ell}$$

et pour $i=j$, $\delta_{\ell}^{ik} = \Omega_i^k p_\ell^i$

$$\text{ex: } \begin{pmatrix} p_j^i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} \Omega_j^i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & -1 \\ -3 & 1 \end{pmatrix}$$

• Par contre pour δ_{ij} on trouve:

$$\delta_{kl} = \delta_{ij} p_k^i p_l^j$$

et pour $i=j$, $\delta_{kl} = \delta_{ii} p_k^i p_l^i = p_k^i p_l^i$

$$l=1 \rightarrow \delta_{11} = p_1^1 p_1^1 + p_1^2 p_1^2 = 10 \neq 1$$

$k=1$

11

donc δ_{ij} n'est pas un tenseur.