

Mercrèdi 26 février de l'an 2020

SAF, 18H, cours de Stéphane Michajlovic.

III Outils conceptuels et analyse tensorielle

[A] Éléments de géométrie différentielle

1) Variétés abstraites

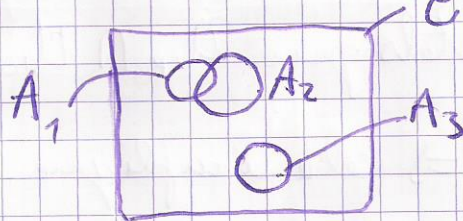
Définition 1:

Soit E un ens. non vide dont les élt sont appelés "points" et $\mathcal{C}$ une famille de parties de E telle que

i) $\emptyset$ et $\emptyset \in \mathcal{C}$

ii) $\mathcal{C}$ est stable par union dénombrable.

(stable : le résultat est dans l'ens. de départ)



Exemple : si $E : \Omega = \{b, a, c\}$

$\mathcal{C} : \mathcal{P}(\Omega) = \{\{b\}, \emptyset, \Omega, \{a, c\}, \{a, b, c\}\}$

si $\text{card } \Omega = n$, $\text{card } \mathcal{P}(\Omega) = 2^n$

iii) $\mathcal{C}$ est stable par intersection finie.
exemple:

$$\left] x_0 - \frac{1}{n}; x_0 + \frac{1}{n} \right[= A_n \in \mathcal{C}$$

$$A_1 \cap A_2 \cap \dots \cap A_n \cap \dots = \{x_0\} = [x_0; x_0]$$

On dit que $\mathcal{C}$ définit une topologie sur E dont les éléments sont appelés ouverts.

$(E, \mathcal{C})$ est appelé espace topologique: X
(e.t.)

On supposera:

a) que X est séparé: si P et Q sont 2 éléments de E , on peut toujours trouver 2 ouverts U_P et $U_Q \in \mathcal{C}$ tels que $U_P \cap U_Q = \emptyset$.

($\Rightarrow$ cela implique l'unicité de la limite)

(P et Q sont 2 points).

b) X est connexe: il n'existe pas de partition de E en 2 parties disjointes ouvertes ($\Rightarrow E$ est d'un seul tenant).

Définition 2:

Un homéomorphisme entre 2 e.t. $X \xrightarrow{\quad} Y$ est une application continue, bijective, dont la bijection réciproque est aussi continue.

On supposera que E est métrisable (muni d'une distance).

Définition:
de la distance

$$d: E \times E \rightarrow \mathbb{R}$$

$$(P, Q) \mapsto d(P, Q)$$

$$* d(P, Q) = d(Q, P) : \text{symétrique}$$

$$* \underline{d(P, Q) \geq 0} \text{ nulle seulement si } P = Q$$

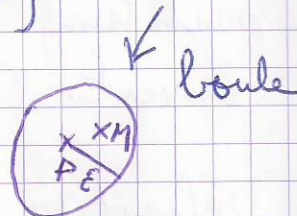
$$* d(A, B) \leq d(A, P) + d(P, B)$$

On peut définir les ouverts sous la forme:

$B(P, \varepsilon)$ ouvert de centre P et de rayon ε .

$\uparrow$ "boule"

par $\{M \in \mathcal{E} \mid d(P, M) < \varepsilon\}$: $B(P, \varepsilon)$



Définition 3 :

Une variété topologique de dim. m est un e. t. X que nous noterons $\mathcal{U}_m$ tel que :

$\forall M_0 \in \mathcal{E}, \exists : \mathcal{U}_{M_0} \subset \mathcal{U}_m$ et un homéomorphisme h

$h : \mathcal{U}_{M_0} \rightarrow V_{M_0} \subset \mathbb{R}^m$

le couple $(\mathcal{U}_{M_0}, h)$

(ex : $(0, 2, 4, \sqrt{3}) \in \mathbb{R}^3$)

se nomme une carte (locale en M_0) de $\mathcal{U}_m$ en M_0 .

Définition 4:

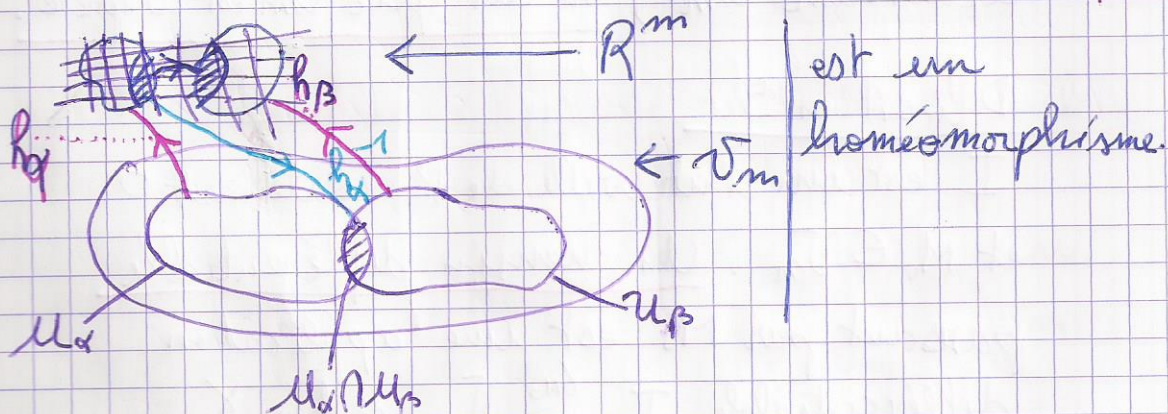
On appelle atlas une famille de carte
 $(U_\alpha, h_\alpha)_{\alpha \in I}$ de cartes de V_m

telle que $\bigcup_{\alpha} U_\alpha \supset V_m$
 $\uparrow$
union sur α

" V_m est recouverte de cartes".

• Si, pour 2 cartes qui se chevauchent
 $(U_\alpha, h_\alpha), (U_\beta, h_\beta)$ telles que
 $U_\alpha \cap U_\beta \neq \emptyset$, alors l'application

$$h_\beta \circ h_\alpha^{-1} : h_\alpha^{-1}(U_\alpha \cap U_\beta) \rightarrow h_\beta(U_\alpha \cap U_\beta)$$



(cette application est un changement de carte)

Si on suppose que tous les changements de carte sont des applications différentiables

$$h_\beta \circ h_\alpha^{-1}$$

alors V_m a une structure différentiable de classe C^k .

Si k est infini, on parle de variété analytique (= avec des développements "infinis")

Si on extrait de I un sous-ensemble fini tel que l'atlas $((U_\beta, h_\beta))_{\beta \in J}$ ne comprend qu'un nombre fini de cartes recouvrant V_m , on dit que V_m est compacte.

Définition 5:

I est un intervalle de $\mathbb{R}$ contenant 0 et $M_0 \in V_m$. Un chemin différentiable passant par M_0 est une application différentiable $I \xrightarrow{\gamma_{M_0}} V_m$ notée γ_{M_0}

telles que $\gamma_{M_0}(0) = M_0$.

On notera Γ_{M_0} l'ens. de tous les chemins différentiables passant par M_0 .

Définition 6 :

On appelle représentation ou lecture de γ_{M_0} dans la carte (U_{M_0}, h) l'application :

$$h \circ \gamma_{M_0} : I \rightarrow \mathbb{R}^m \\ u \mapsto \begin{pmatrix} x^1(u) \\ \vdots \\ x^m(u) \end{pmatrix}$$

(= représentation du chemin = "trajectoire")

• Définissons dans Γ_{M_0} une relation d'équivalence $\sim$ entre

γ_{iM_0} et γ_{jM_0} alors on dira $\gamma_{iM_0} \sim \gamma_{jM_0}$ ssi

$\forall f \in \mathcal{C}_h^{U_{M_0}}$ on a : $f : \mathcal{I}_M \rightarrow \mathbb{R}^m$

$$\frac{d}{du}(f \circ \gamma_{iM_0})_{u=0} = \frac{d}{du}(f \circ \gamma_{jM_0})_{u=0} \quad \text{?}$$

Preuve :

1) $\gamma_{iM_0} \sim \gamma_{iM_0}$

2) $\gamma_{iM_0} \sim \gamma_{jM_0} \Leftrightarrow \gamma_{jM_0} \sim \gamma_{iM_0}$ (symétrique)

3) transitive :

Si $\gamma_{iM_0} \sim \gamma_{jM_0}$ et $\gamma_{jM_0} \sim \gamma_{kM_0}$ alors

$$\gamma_{iM_0} \sim \gamma_{kM_0}$$

L.P.E.F.

• Une classe d'équivalence γ_{M_0} pour $\sim$ est appelé vecteur tangent à $\mathcal{V}_m$ en M_0 et a pour lecture dans (U_{M_0}, h)

$$\frac{d}{du} (h \circ \gamma_{M_0}) \Big|_{u=0} = \begin{pmatrix} \frac{dx^1}{du} \Big|_{u=0} \\ \vdots \\ \frac{dx^m}{du} \Big|_{u=0} \end{pmatrix} (\vec{e}_i)$$

Définition 7 :

L'espace tangent à V_m en M_0 est l'espace quotient $\frac{T_{M_0}}{\sim}$ noté $\mathcal{T}_{M_0}$ des classes d'équivalences $\bar{\gamma}_{M_0}$.
(↑ ensemble de tous les espaces ...)

ex : division par 3

$$\begin{array}{r} 7 \\ 1 \end{array} \begin{array}{l} 3 \\ 2 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 9 \\ 0 \end{array} \begin{array}{l} 3 \\ 3 \end{array}$$

$\mathbb{Z}$

"à même reste dans la div par 3" $= \{ \bar{0}, \bar{1}, \bar{2} \}$

(c'est un espace quotient)

Théorème 1 :

$\mathcal{T}_{M_0}$ est un espace vectoriel de dim. m .

• Principe de la démonstration :

elle se fait en 3 temps :

1) pour $f = h$ difféomorphisme de classe $\mathcal{C}^k$ la relation $\sim$ ne dépend pas du choix de f (même lecture du "vecteur" tangent)

2) L'application $h : \mathcal{T}_{M_0} \rightarrow \mathbb{R}^m$

$$\xi = \bar{\gamma}_{M_0} \mapsto h(\xi) = \frac{d}{dt}(h \circ \gamma_{M_0})_{t=0}$$

appelée lecture d'un vect. tangent est bijective.

3) On démontre que : $l_g \circ l_g^{-1}$ est linéaire
et donc c'est un isomorphisme
entre T_{g_0} et $\mathbb{R}^m$.

Conclusion: T_{g_0} est isomorphe à $\mathbb{R}^m$
c'est un e.v. de dim. m .

L.P.E.F.

• $\mathcal{V}_m \subset \mathbb{R}^m$ (théorème de
Withney)
comment "connecter 2 points"?

• Dans une variété Riemannienne : $\mathcal{V}_m$ est
diff. et sur un domaine $D \subset \mathcal{V}_m$, on se
donne $\tilde{g} \in \mathcal{T}_M^{\otimes 2}$, $M \in D$

bilinéaire symétrique supposée non dégénérée

c-à-d: (si $\tilde{g}(\xi, \eta) = 0$

$\forall \xi \in \mathcal{T}_M$, alors $\eta = 0$)

$$g'_{ij} = \frac{\partial y^k}{\partial x^i} \frac{\partial y^l}{\partial x^j} g_{kl}$$

Cette relation n'est pas nécessairement vérifiée $\forall M \in D$ pour $\tilde{g}$.