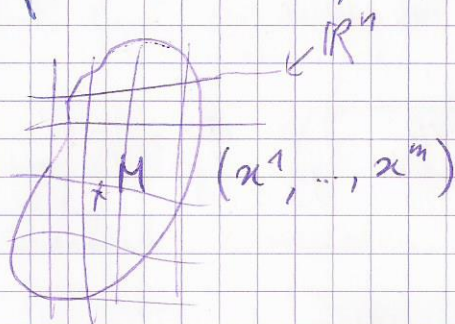


Mercrredi 4 mars de l'au 2020

C'est mercredi, jour de Mercurre-Hermès,
SAF, 18H cours de Stéphane Mihajlovic.

• 1^{ère} approche :

On considère Σ_m $m=4$ comme une
hypersurface de $\mathbb{R}^n$, $n \geq 4$



On se donne m fonctions $y^j = y^j(x^1, \dots, x^m)$
de classe C^k $k \geq 2$ sur U_m des
coord. cartésiennes $(x^1, \dots, x^m)$

Le théorème de Swartz est vérifié :

$$\frac{\partial^2 y^j}{\partial x^i \partial x^k} = \frac{\partial^2 y^j}{\partial x^k \partial x^i}$$

$$\text{et } \det(J)_y = \det\left(\frac{\partial y^j}{\partial x^i}\right) \neq 0$$

La transformation γ est bijective

γ^{-1} existe et est définie par les fonctions

$$x^i = X^i(y^1, \dots, y^m)$$

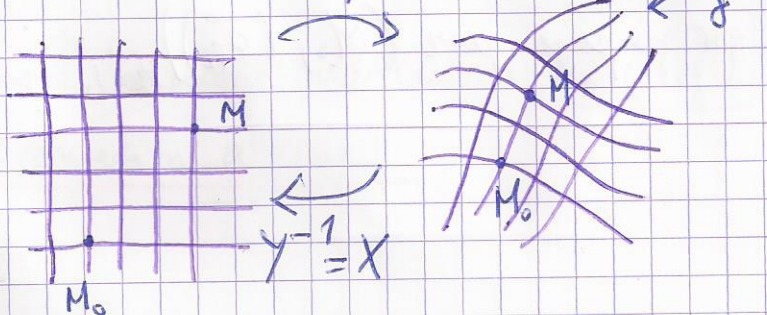
Supposons qu'une seule des coord. par ex y^k varie. $y^k = u$ paramétrise, les autres étant fixées.

Donc on a $i=1, \dots, m$ $x^i = X^i(u)$

$u \in I$ intervalle de $\mathbb{R}$ contenant 0.

si $u=0$ $x^i = X^i(0) = x_0^i$ sont les coord. cartésiennes de M_0 .

$M(x^i)$ décrit dans U_m un chemin passant par M_0 à $u=0$. Ce chemin est la courbe coordonnées y^k passant par M_0 et est définie par les fonctions $x^i = X^i(y^1, \dots, y^m)$



On a: $d\vec{M} = \lim_{M \rightarrow M_0} \vec{M_0 M}$

$d\vec{M} = dx^i \vec{e}_i$

, $\frac{\partial \vec{M}}{\partial y^k} = \frac{\partial x^i}{\partial y^k} \vec{e}_i = \vec{E}_k$

↑ matrice
jacobienne
inverse $\frac{\partial y^k}{\partial x^i} = (J)_i^k$

Compte tenu de ce que γ est un difféomorphisme
les $\vec{E}_k$ sont les vect. colonnes
de $(J)_i^k$ et sont donc libres.

On a donc construit un repère local en M_0 :
 $(M_0, (\vec{E}_1, \dots, \vec{E}_m))$ un "repère naturel"

(6): $\vec{E}_k = \frac{dX^i}{du} \vec{e}_i = \frac{d}{du} (h \circ \gamma_{M_0})(u) \Big|_{u=0}$

Théorème 2:

$\mathcal{U}_{M_0}$ est repéré par $(M_0, (\vec{E}_k))_{k=1, \dots, m}$

• Le pb est : V_m étant rapportée à un syst. de coordonnées curvilignes en tout point pour lequel $ds^2 = g_{ij} dy^i dy^j$ déterminer par rapport au repère naturel $(M_0, (\vec{E}_h))$

le repère naturel en $\vec{M}_0 + d\vec{M} : (\vec{M} + dM_i, \vec{E}_h + d\vec{E}_h)$

Ce nouveau est parfaitement déterminé si on connaît :

$$(7) : d\vec{M} = dy^i \vec{E}_i \quad \text{et} \quad d\vec{E}_i = \omega_i^j \vec{E}_j$$

$$(\vec{u} \cdot \vec{grad} = \vec{0})$$

$$(\vec{u} \wedge \vec{u} = \vec{0})$$

$$(h\vec{u} \wedge \vec{u} = \vec{0})$$

$$\frac{\partial^2 M}{\partial y^k \partial y^j} = \frac{\partial^2 M}{\partial y^j \partial y^k}$$

au 1er ordre on suppose que : $\omega_i^j = \Gamma_{ik}^j dy^k$

Les m^3 fonctions arbitraires $\Gamma_{ik}^j(y^l)$ forment la connexion affine.

Nous, à partir des $\frac{m(m+1)}{2}$ g_{ij}
 on va construire une connexion métrique de
 Levi-Civita. (voir le mathématicien Cartan)

$$\begin{aligned}\text{On a : } g_{ij} &= (\vec{e}_i | \vec{e}_j) \\ dg_{ij} &= (d\vec{e}_i | \vec{e}_j) + (\vec{e}_i | d\vec{e}_j) \\ &= (w_i^h \vec{e}_h | \vec{e}_j) + (\vec{e}_i | w_j^h \vec{e}_h) \\ &= w_i^h (\vec{e}_h | \vec{e}_j) + w_j^h (\vec{e}_i | \vec{e}_h) \\ &= w_i^h g_{jh} + w_j^h g_{ih}\end{aligned}$$

$$(9) \quad dg_{ij} = w_{ij}^h + w_{ji}^h$$

$$\begin{aligned}w_i^h g_{jh} &= g_{jh} \Gamma_{ik}^h dy^k \\ \underline{w_{ij}^h} &= \underline{\Gamma_{ik}^h dy^k}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\Rightarrow dg_{ij} &= \Gamma_{ijk}^h dy^k + \Gamma_{jik}^h dy^k \\ &= \frac{\partial g_{ij}}{\partial y^k} dy^k = \partial_k g_{ij} dy^k\end{aligned}$$

$$(10) \quad \Gamma_{ijk}^h + \Gamma_{jik}^h = \partial_k g_{ij}$$

On a $\frac{m(m+1)}{2}$ g_{ij} donc $\frac{m^2(m+1)}{2}$ relations (10).

On a donc un déficit de $m^3 - \frac{m^2(m+1)}{2}$,

soit $\frac{m^2(m-1)}{2}$ relations.

Nous allons les déterminer par les seules conditions d'intégrabilité de (7):

$$\frac{\partial^2 \vec{M}}{\partial y^k \partial y^j} = \frac{\partial}{\partial y^k} \left(\frac{\partial \vec{M}}{\partial y^j} \right) = \frac{\partial}{\partial y^k} (\vec{E}_j)$$

$$d\vec{E}_i = \Gamma_{ik}^j \vec{E}_j dy^k$$

$$(d\vec{E}_i = \omega_i^j \vec{E}_j = \Gamma_{ik}^j \vec{E}_j dy^k)$$

$$\text{Donc } \frac{\partial \vec{E}_i}{\partial y^k} = \Gamma_{ik}^j \vec{E}_j = \Gamma_{ik}^j \vec{E}_j$$

$$\text{Comme } \frac{\partial^2 \vec{M}}{\partial y^k \partial y^i} = \frac{\partial^2 \vec{M}}{\partial y^i \partial y^k} \Rightarrow \Gamma_{ik}^j = \Gamma_{ki}^j \rightarrow \text{symétrie en } i \text{ et } k.$$

On a obtenu $C_m^2 \times m$ relations supplémentaires

$$\frac{m(m-1)}{2} \times m = \frac{m^2(m-1)}{2} \text{ qui sont les}$$

équations manquantes.

Remarque : les autres cond. d'intégrabilité de (7)

$$\frac{\partial^2 \vec{E}_i}{\partial y^h \partial y^j} = \frac{\partial^2 \vec{E}_i}{\partial y^j \partial y^h} \Rightarrow \text{La courbure est nulle.}$$

Détermination des Γ_{ij}^k

$$\text{On part de } \begin{cases} \Gamma_{ijk} + \Gamma_{jik} - \partial_k g_{ij} & (a) \\ \Gamma_{ijk} = \Gamma_{kji} & (15) \end{cases}$$

On suit 2 autres relations identiques:

$$\Gamma_{jki} + \Gamma_{kji} = \partial_i g_{jk} \quad (b)$$

$$\Gamma_{kij} + \Gamma_{ikj} = \partial_j g_{ki} \quad (c)$$

On fait (a) + (b) - (c) en tenant compte de (15)

$$\rightarrow \partial_k g_{ij} + \partial_i g_{jk} - \partial_j g_{ki} = \Gamma_{ijk} + \Gamma_{jik} + \Gamma_{kji} + \Gamma_{kij} - \Gamma_{ikj} - \Gamma_{ihj}$$

$$\Gamma_{ijk} = \frac{1}{2} (\partial_k g_{ij} + \partial_i g_{jk} - \partial_j g_{ki})$$

symboles de Christoffel de 1^{ère} espèce

$$\Gamma_{ik}^j = g^{jl} \Gamma_{ilk}$$

$$\Gamma_{i j k} = \frac{1}{2} g^{j l} (\partial_k g_{i l} + \partial_i g_{k l} - \partial_l g_{i k})$$

symboles de Christoffel de 2^{ème} espèce.

• Montrons que la suite $(\Gamma_{i j k})_{i j k}$ n'est pas tensorielle.

$$(p_m^l) = (J)^{-1}_{m0} \text{ matrice de passage de}$$

$$(\vec{E}_i) \rightarrow (\vec{E}'_i)$$

$$(J) = (p_m^l)^{-1} = (\pi_l^m)$$

$$d\vec{E}'_i = d(p_i^j \vec{E}_j) = dp_i^j \vec{E}_j + p_i^j d\vec{E}_j$$

$$= \frac{\partial p_i^j}{\partial y'^k} dy'^k \vec{E}_j + p_i^j \Gamma_{j k}^h dy'^k \vec{E}_h$$

$$= \frac{\partial p_i^j}{\partial y'^k} dy'^k \pi_j^l \vec{E}'_l + p_i^j \Gamma_{j k}^h p_l^h dy'^k \pi_l^m \vec{E}'_m$$

$$= \left[\frac{\partial p_i^j}{\partial y'^k} \pi_j^m + p_i^j p_k^l \pi_l^m \Gamma_{j k}^h \right] dy'^k \vec{E}'_m$$

$$= \Gamma'_{i k}^m dy'^k \vec{E}'_m$$

$$\Rightarrow \Gamma_{ik}^{lm} = p_i^j p_k^l r_h^m \Gamma_{jl}^h + \underbrace{\frac{\partial p_i^j}{\partial y'^k} r_j^m}_{\text{terme supplémentaire}}$$

qui entraîne la non-tensorialité
des symboles de Christoffel.

3) Dérivation covariante et transport parallèle

a) Equations des géodésiques.

Considérons un domaine D régulier $\subset U_m$
avec un syst. de coord. curvilignes (y^i)
et une f. b.-l s. d. $g_{ij}(y^l)$

$$(\det(g_{ij}) \neq 0).$$

Considérons un arc $\widehat{M_0 M}$ lieu des points $M(y^i(\tau))$
pour $\tau \in [\tau_0, \tau_1]$ tel que

$$M_{\tau_0} = M_0, \quad M_{\tau_1} = M_1$$

$$l_{\widehat{M_0 M_1}} = \int_{\tau_0}^{\tau_1} \left| \frac{ds}{d\tau} \right| d\tau \quad \text{où } ds = \widehat{M_{\tau} M_{\tau+d\tau}}$$

ou encore $L_{H_0 H_1} = \int_{z_0}^{z_1} \underbrace{\sqrt{g_{ij} \dot{y}^i \dot{y}^j}}_{\text{Lagrangien}} dz$

avec $\dot{y}^i = \frac{dy^i}{dz}$