

Mercrèdi 30 septembre de l'an 2020

* SAF, 18H. Cours de Stéphane Mihajlovic.

Mécanique céleste - Programme 2020/2021:

I) Système isolé à 2 corps

II) Géométrie de Clairaut

Effets de marée

Perturbation du mouvement idéal.

III) Rappel de mécanique hamiltonienne.

IV) Stabilité : - les points de Lagrange
- les résonnances

- stabilité du système solaire

I) Mouvement Képlérien idéal

A) Repérage et dynamique classique

① Cadre de la mécanique classique

Un espace affine associé à l'espace vectoriel (e.v.) $\mathbb{R}^3$ muni de sa structure euclidienne avec une chronologie.

Si 2 référentiels R et R' sont tels qu'un événement décrit par (x, y, z, t) dans R est décrit par (x', y', z', t') de R' .

$$\begin{cases} \Delta x' = \Delta x - V_x \Delta t \\ \Delta y' = \Delta y - V_y \Delta t \\ \Delta z' = \Delta z - V_z \Delta t \\ \Delta t' = \Delta t \end{cases}$$

$$\text{où } \vec{V}_e = \begin{pmatrix} V_x \\ V_y \\ V_z \end{pmatrix} \text{ constant (vecteur)} \quad 2$$

$\vec{V}_e$: vitesse d'entraînement = cste
 R' est en déplacement rectiligne
uniforme / à R .

Remarque :

$$\frac{\Delta x'}{\Delta t'} = \frac{\Delta x}{\Delta t} - V_x \quad \text{comme } \Delta t' = \Delta t$$

à la limite pour $\Delta t \rightarrow 0$

on a :

$$\begin{aligned} \vec{v}_{R'} &= \vec{v}_R - \vec{V}_e \\ \vec{v}_R &= \vec{v}_{R'} + \vec{V}_e \end{aligned}$$

loi de composition des vitesses.

② Référentiel barycentrique

Soient $A_1, \dots, A_n$ de masses respectives $m_1, \dots, m_n$.

Le barycentre G de ces n points est défini (à partir de O origine) de R

$$\vec{OG} = \sum_{i=1}^n m_i \vec{OA_i} / \sum_i m_i$$

$$\sum_i m_i = M_G$$

on a : $\sum_i m_i \vec{GA_i} = \vec{0}$ si $G=0$

La quantité de mouvement totale est :

$$\vec{P} = \sum_{i=1}^n \vec{p_i} \text{ où } \vec{p_i} = m_i \frac{d\vec{OA_i}}{dt} = m_i \vec{v_i}$$

$$\begin{aligned} \vec{P} &= \sum_{i=1}^n m_i \vec{v_{ix}} \frac{M_G}{M_G} = M_G \sum_i \frac{m_i}{M_G} \vec{v_i} \\ &= M_G \frac{d}{dt} \left(\sum_i \frac{m_i \vec{OA_i}}{M_G} \right) \end{aligned}$$

$$\vec{P} = M_G \frac{d\vec{OG}}{dt}$$

soit : $\vec{P} = M_G \vec{v_G}$

Théorème :

La quantité de mouvement totale d'un système matériel est égale à la quantité de mouvement d'un point matériel fictif confondu avec le barycentre du système concentrant toute la masse du système.

Soit R' en translation / à R . A une date t tous les points fixes de R' ont la même vitesse $\vec{V}_e$ dans R .

Si M a une vitesse $\vec{v}_{M/R}$, on a :

$$\vec{v}_{M/R} = \vec{v}'_{M/R'} + \vec{V}_e$$

La quantité ^{de mouvement} totale des points A_i dans R' est : $\vec{P}' = \sum_{i=1}^n m_i \vec{v}'_i$

on a vu que : $\vec{v}'_i = \vec{v}_i - \vec{V}_e$

$$\text{donc } \vec{P}' = \sum_i m_i (\vec{v}_i - \vec{V}_e) = \sum_i m_i \vec{v}_i - \sum_i m_i \vec{V}_e$$

$$\boxed{\vec{P}' = \vec{P} - M_G \vec{V}_e}$$

On : $\vec{P} - M_G \vec{V}_e = \vec{0} \Leftrightarrow \vec{P} = M_G \vec{V}_e$

on veut

$$\text{or } \vec{P} = M_G \frac{d\vec{OG}}{dt} = M_G \vec{v}_G$$

$$\Rightarrow \boxed{\vec{v}_G = \vec{V}_e}$$

On choisira R' réf. du centre de masse

$$(G, (\vec{e}_1', \vec{e}_2', \vec{e}_3'), t)$$

$$\text{avec } \vec{e}_i = \vec{e}_i'$$

Le moment cinétique $\vec{J}$:

De part la nature tensorielle du champ de moment cinétique

Le tenseur cinétique s'écrit $\{ \vec{P} / \vec{\sigma}_0 \}$

au point O.

En O' :

$$\vec{\sigma}_{/O'} = \vec{\sigma}_{/O} + \vec{O'O} \wedge \vec{P}$$

Cette relation ne suppose pas que O' est fixe / à O .

Soit R' en translation / R avec $\vec{V}_e$ à l'instant t .

On peut écrire dans R' :

$$\vec{\sigma}'_{/O} = \vec{\sigma}'_{/O'} + \vec{O'O} \wedge \vec{P}'$$

$$\text{On a : } \vec{\sigma}'_{/O} = \sum_i \vec{OA}_i \wedge m_i \vec{v}'_i \quad \text{par définition}$$

$$= \sum_i \vec{OA}_i \wedge m_i (\vec{v}_i - \vec{V}_e)$$

$$= \sum_i \vec{OA}_i \wedge m_i \vec{v}_i - \sum_i m_i \vec{OA}_i \wedge \vec{V}_e$$

$$= \vec{\sigma}_{/O} - M_G \vec{OG} \wedge \vec{V}_e$$

$$\Rightarrow \vec{\sigma}'_{/O} = \vec{\sigma}_{/O} - M_G \vec{OG} \wedge \vec{V}_e + \vec{O'O} \wedge \vec{P}'$$

Si R' est le référentiel du centre de masse
on sait que $\vec{P}' = \vec{0}$ et $\vec{v}_G = \vec{V}_e$ ($O' = G$)

$$\Rightarrow \vec{\sigma}'_G = \vec{\sigma}_{/G} - \vec{OG} \wedge \vec{P}$$

$$\rightarrow \vec{\sigma}_{/G} = \vec{\sigma}'_G + \vec{OG} \wedge \vec{P}$$

Remarque:

- dans le référentiel le torseur cinétique devient $\{\vec{0} / \vec{\sigma}'_G\}_{O'}$
c'est-à-dire un "couple".

$$\text{et } \vec{\sigma}_{/P} = \vec{\sigma}'_G + \vec{PG} \wedge \vec{P}$$

- Pour un point A_i on a $\vec{v}_i = \vec{v}'_i + \vec{V}_e$

$$\Rightarrow \vec{v}_i^2 = \vec{v}'_i^2 + \vec{V}_e^2 + 2 \vec{v}'_i \cdot \vec{V}_e$$

$$\Rightarrow \frac{1}{2} m_i \vec{v}_i^2 = \frac{1}{2} m_i \vec{v}'_i^2 + \frac{1}{2} m_i \vec{V}_e^2 + m_i \vec{v}'_i \cdot \vec{V}_e$$

$$\Rightarrow K_i = K'_i + \frac{1}{2} m_i \vec{V}_e^2 + \vec{p}'_i \cdot \vec{V}_e$$

K_i : énergie cinétique

$$K = K' + \frac{1}{2} M_G \vec{v}_e^2 + \vec{P}' \cdot \vec{v}_e$$

Si R' est le référentiel du centre de masse

$$K = K' + \frac{1}{2} M_G \vec{v}_G^2$$

$$\begin{aligned} & (O' = G) \\ & (\text{et } \vec{P}' = \vec{0}) \\ & \text{et } (\vec{v}_e = \vec{v}_G) \end{aligned}$$

③ Lois de Newton et lois de Kepler

1^{ère} loi de Newton : principe d'inertie

$$\begin{aligned} \vec{v} &= \vec{v}' + \vec{v}_e, \quad \vec{v}_e = \text{cte} \\ \text{ou dérive} \Rightarrow \vec{F} &= \vec{F}' \quad \left(m \frac{d\vec{v}}{dt} = m \frac{d\vec{v}'}{dt} \right) \end{aligned}$$

2^{ème} loi de Newton :

proportionnalité entre la variation de quantité de $m \cdot v$ d'un système matériel et des forces qui lui sont appliquées. (méca. du point)
et ... entre la variation du moment cinétique et l'ensemble des moments appliqués. (mécanique du solide)

3^{ème} loi de Newton: Principe d'action-réaction

Conséquence 1: interaction à vitesse infinie

Conséquence 2:

Soient (1) et (2) 2 systèmes ^{matériels} en interactions, si on a:

$$\sum \vec{F}_{2/1} = -\sum \vec{F}_{1/2}$$

$$\frac{d}{dt} \vec{P}_{1/1} = -\frac{d}{dt} \vec{P}_{1/2} \Rightarrow \vec{P}_{1/1} + \vec{P}_{1/2} = \vec{cte}$$

• 1^{ère} loi de Kepler:

Chaque planète décrit autour du soleil une ellipse dont le soleil est l'un des 2 foyers.

• 2^{ème} loi de Kepler:

Les aires balayées par le vecteur position (Soleil-planète) sont proportionnelles aux durées nécessaires à les décrire.

$$S = \pi a b = \mathcal{A}_{\text{Totale}}$$

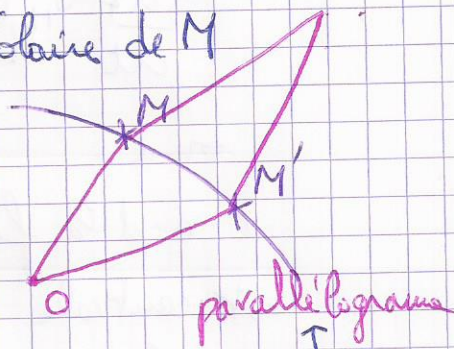
$$\frac{\Delta \mathcal{A}}{\Delta t} = \frac{\mathcal{A}_{\text{Totale}}}{T}$$

Théorème :

Pour un point matériel M de masse m en mot plan / R_0 ,

$$\vec{\Gamma}_{M/R_0} = 2m \vec{v} \text{ aréolaire de M}$$

Preuve : $\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\vec{MM}'}{\Delta t} = \vec{v}_{M/R_0}$



L'aire balayée par $\vec{OM} \approx \frac{1}{2}$ aire du $\square$

Cette aire vaut : $|\vec{OM} \wedge \vec{OM}'| = |\vec{OM} \wedge (\vec{OM} + \vec{MM}')|$

$$|\vec{OM} \wedge \vec{OM} + \vec{OM} \wedge \vec{MM}'| = |\vec{OM} \wedge \vec{MM}'|$$

En passant à la limite $\Delta t \rightarrow 0$

Le vecteur vitesse aréolaire est : $\vec{S} = \frac{1}{2} \vec{OM} \wedge \vec{v}_{M/R_0}$

et donc $\vec{\Gamma}_{M/R_0} = 2m \vec{S}$

• Conséquence 1:

Puisque $\vec{S} = \vec{cste} \Leftrightarrow \vec{T}_{M/R_0} = \vec{cste}$

• Conséquence 2:

Appliquons la 2^{ème} loi de Newton pour les moments :

$$\frac{d}{dt} \vec{T}_{M/R_0} = \vec{OM} \wedge \sum \vec{F} \text{ et comme } \vec{T}_{M/R_0} = \vec{cste}$$

$$\text{on a : } \vec{OM} \wedge \sum \vec{F} = \vec{0}$$

c-à-d la force totale appliquée en M est centrale (dirigée vers O)

(radiale car colinéaire au rayon vecteur $\vec{OM}$)

• 3^{ème} loi de Kepler :

les carrés des périodes de révolution des planètes sont proportionnels aux cubes des grands axes de leurs orbites.

$$\frac{a_1^3}{T_1^2} = \frac{a_2^3}{T_2^2} = K : \text{constante de Kepler.}$$