

Le 26 août de l'an 2020

O.S.

x Relation fondamentale de la dynamique en Relativité Générale (RG).

1) Rappel de mécanique classique (Newtonienne)

Nous sommes en dimension 3 dans un espace plat euclidien $\mathbb{R}^3$

Soit P un point de cet espace

$$P \in \mathbb{R}^3 \quad P(x, y, z) \text{ ou } P(x^1, x^2, x^3)$$

La norme de cet espace est :

$$ds^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2$$

En mécanique classique la relation fondamentale de la dynamique s'écrit :

$$m \vec{a} = \sum_i \vec{F}_i \quad (\text{R.F.D.})$$

avec m : masse inertielle = m_i

$$\vec{a} : \text{accélération} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d^2 x^j}{dt^2}, j=1,2,3$$

$\vec{F}_i$: force appliquée au point P . 1

2) En Relativité Générale

Nous sommes en dimension 4

P est un point de l'espace-temps de la Relativité Générale noté $\mathcal{M}$

$$P \in \mathcal{M}$$

$\mathcal{M}$ est l'espace-temps de la Relativité Générale. C'est une 4-variété courbe.

$\mathcal{M}$ est une 4-variété pseudo-riemannienne.

- "pseudo" signifie que la signature de la métrique est $(-, +, +, +)$ ou $(+, -, -, -)$ et non pas $(+, +, +, +)$

- une variété riemannienne est définie par une norme

$$\|\vec{dX}\|^2 = ds^2 = g_{ij} x^i x^j$$

$$i, j = 0, 1, 2, 3$$

$$\vec{dX} \begin{pmatrix} dx^0 \\ dx^1 \\ dx^2 \\ dx^3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c dt \\ dx \\ dy \\ dz \end{pmatrix} \quad P \begin{pmatrix} x^0 \\ x^1 \\ x^2 \\ x^3 \end{pmatrix}$$

(g_{ij}) est le tenseur métrique de M .

$$(g_{ij}) = \begin{pmatrix} g_{00} & g_{01} & g_{02} & g_{03} \\ g_{10} & g_{11} & g_{12} & g_{13} \\ g_{20} & g_{21} & g_{22} & g_{23} \\ g_{30} & g_{31} & g_{32} & g_{33} \end{pmatrix}$$

- La relation fondamentale de la dynamique en R_4 s'écrit :

$$m a^h = F^h, \quad h=0,1,2,3$$

avec :

m = masse inertielle = m_i

a^h = quadri-accelération

F^h = forces appliquées hors gravitation

On a : $a^h = V^i \nabla_i V^h = \frac{dV^h}{d\tau} + \Gamma_{ij}^h V^i V^j$

avec : V^h = quadri-vitesse $V^h = \frac{dx^h}{d\tau}$

$\nabla_i V^h$ = dérivée covariante du vecteur V^h

τ : temps propre tel que $ds = c d\tau$

On a donc :

$$m \frac{dV^h}{d\tau} + m \Gamma_{ij}^h V^i V^j = F^h$$

c'est de la forme :

$$m \gamma^h = m G^h + F^h$$

avec : $\gamma^h = \frac{dV^h}{d\tau} = \frac{d^2 x^h}{d\tau^2}$

$$G^h = - \Gamma_{ij}^h V^i V^j (= \gamma_{RG}^h)$$

→ c'est l'accélération due à la gravitation

Γ_{ij}^h sont les symboles de Christoffel de 2^{ème} espèce, fonction des g_{ij} et

$\partial_h g_{ij}$ définissant la courbure de l'espace (M) .

On a donc :

$$m \gamma^h = m G^h + F^h$$

$$G^h = -\Gamma_{ij}^h V^i V^j$$

- Remarque 1) : en l'absence de toute force hors gravitation la relation s'écrit juste :

$$a^h = 0 \text{ soit } \gamma^h = G^h$$

Rem 2) Γ_{ij}^h est le symbole de Christoffel de 2^{ème} espèce.

$$\text{On a : } \Gamma_{ij}^h = \frac{1}{2} g^{hl} (\partial_i g_{jl} + \partial_j g_{il} - \partial_l g_{ij})$$

(somme sur l'indice muet l)

(convention d'Einstein).

3) Exemple avec une particule chargée stationnaire du champ électromagnétique

On a une charge stationnaire
 $q = \text{cte}$

(voir le document de Patrick Vandon
"Principe de moindre action et Relativité Générale (1)").

A partir du principe de moindre action on obtient une force :

$$F_{EM}^k = q \cdot g^{ki} F_{ij} \frac{dx^j}{ds} = q g^{ki} F_{ij} \frac{dx^j}{d\tau}$$

d'où la R.F.D. s'écrit :

$$\begin{aligned} m \gamma^k &= m G^k + F_{EM}^k \\ \Leftrightarrow m \frac{d^2 x^k}{d\tau^2} &= -m \Gamma_{ij}^k V^i V^j + q g^{ki} F_{ij} V^j \end{aligned}$$

avec F_{ij} : tenseur de l'électromagnétisme
et une signature de la métrique $(+, -, -, -)$

$$F_{ij} = \begin{pmatrix} F_{00} & F_{01} & F_{02} & F_{03} \\ F_{10} & F_{11} & F_{12} & F_{13} \\ F_{20} & F_{21} & F_{22} & F_{23} \\ F_{30} & F_{31} & F_{32} & F_{33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & \frac{E_x}{c} & \frac{E_y}{c} & \frac{E_z}{c} \\ -\frac{E_x}{c} & 0 & -B_z & B_y \\ -\frac{E_y}{c} & B_z & 0 & -B_x \\ -\frac{E_z}{c} & -B_y & B_x & 0 \end{pmatrix}$$

$$F_{ij} = -F_{ji} \quad : \text{antisymétrique}$$

$$\vec{E} = \begin{pmatrix} E_x \\ E_y \\ E_z \end{pmatrix} : \text{champ électrique}$$

$$\vec{B} = \begin{pmatrix} B_x \\ B_y \\ B_z \end{pmatrix} : \text{champ magnétique}$$

Le lagrangien s'écrit

$$L = +q(-\varphi + \vec{v} \cdot \vec{A})$$

φ : potentiel scalaire

$\vec{A} = \begin{pmatrix} A_x \\ A_y \\ A_z \end{pmatrix}$: potentiel vecteur $\vec{B} = \text{rot } \vec{A}$

En notation tensorielle on pose :

$$V^\mu = \frac{dx^\mu}{d\tau} = \begin{pmatrix} \frac{dx^0}{d\tau} \\ \frac{dx^1}{d\tau} \\ \frac{dx^2}{d\tau} \\ \frac{dx^3}{d\tau} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c \\ \frac{dx}{dt} \\ \frac{dy}{dt} \\ \frac{dz}{dt} \end{pmatrix} \quad x^0 = ct$$

$$\Rightarrow \frac{dx^0}{dt} = c$$

$$A_\mu = (A_0, A_1, A_2, A_3) = (\varphi/c, -A_x, -A_y, -A_z)$$

avec une signature de la métrique
(+, -, -, -)

$$L = -q A_\mu V^\mu$$

A_μ : quadri-potentiel

V^μ : quadri-vitesse $= \frac{dx^\mu}{d\tau}$

Action :

$$S_{EM} = \int_{s_1}^{s_2} L_{EM} ds = -q \int_{s_1}^{s_2} A_\mu \frac{dx^\mu}{d\tau} ds$$

$$ds = c d\tau$$

$$S_{EM} = -q c \int_{x_1}^{x_2} A_\mu dx^\mu$$

D'où un lagrangien total :

$$L = L_{RG} + L_{EM} = -mc \sqrt{g_{ij} \frac{dx^i}{ds} \frac{dx^j}{ds}} - q \left(A_\mu \frac{dx^\mu}{ds} \right)$$

$$S = S_{RG} + S_{EM} = - \int_{s_1}^{s_2} mc \sqrt{g_{ij} \frac{dx^i}{ds} \frac{dx^j}{ds}} ds - q \int_{s_1}^{s_2} \left(A_\mu \frac{dx^\mu}{ds} \right) ds$$

On fait varier les 2 actions :

$$\delta S = \delta S_{RG} + \delta S_{EM}$$

On trouve :

$$m \left(g_{\mu\nu} \frac{dx^\mu}{ds} \frac{dx^\nu}{ds} + \Gamma_{ijk}^h \frac{dx^i}{ds} \frac{dx^j}{ds} \right) = -q \left(\frac{\partial A_h}{\partial x^i} - \frac{\partial A_i}{\partial x^h} \right) \frac{dx^i}{ds}$$

$$F_{jh} = \frac{\partial A_h}{\partial x^j} - \frac{\partial A_j}{\partial x^h} = \partial_j A_h - \partial_h A_j = \nabla_j A_h - \nabla_h A_j$$

tenseur de l'E.M.

On trouve :

$$m \left(\frac{dx^\mu}{d\tau^2} + \Gamma_{ij}^{\mu} \frac{dx^i}{d\tau} \frac{dx^j}{d\tau} \right) = q g^{\mu\nu} F_{\nu j} \frac{dx^j}{d\tau}$$

Espace de Finsler:

On a obtenu:

$$S = S_{RG} + S_{EM} = - \int_{s_1}^{s_2} mc \sqrt{g_{ij} \frac{dx^i}{ds} \cdot \frac{dx^j}{ds}} ds - q \int_{s_1}^{s_2} A_\mu \frac{dx^\mu}{ds} ds$$

$$\begin{aligned} S &= -mc \int_{s_1}^{s_2} \sqrt{g_{ij} dx^i dx^j} - q \int_{s_1}^{s_2} A_\mu dx^\mu \\ &= - \int_{s_1}^{s_2} mc \left(\sqrt{g_{ij} dx^i dx^j} + \frac{q}{mc} A_\mu dx^\mu \right) \end{aligned}$$

Du point de vue variationnel on ne change pas si on divise S par une constante mc :

$$S' = - \int_{s_1}^{s_2} \left(\sqrt{g_{ij} dx^i dx^j} + \frac{q}{mc} A_\mu dx^\mu \right)$$

$$\text{or: } S' = - \int_{s_1}^{s_2} ds'$$

D'où la métrique de l'espace de Finsler:

$$ds' = \sqrt{g_{ij} dx^i dx^j} + \frac{q}{mc} A_\mu dx^\mu \quad 11$$

$\Rightarrow$ dépend d'un rapport q/m en chaque point.