

Le 13 août de l'an 2020

O.S.

x Relativité Restreinte (RR)
en anglais: Special Relativity (SR)

$$R \xrightarrow{\vec{v}} R'$$

Référentiel R

Référentiel R'

R' est en translation uniforme par rapport à R de vitesse $v = v_{R'/R} = \text{cte}$

Pas d'accélération, sinon on est en Relativité Générale, il s'agit d'une autre théorie.

1) Transformation de Lorentz

- le temps se dilate selon un coefficient γ

$$t' = \gamma t \quad \gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$$

$\gamma > 1$, $t' > t$: le temps se dilate, passe moins vite lorsque R' se déplace à la vitesse v .

- l'espace se dilate d'un coefficient γ

$$x' = \gamma x$$

$$\gamma > 1, \quad x' > x$$

- lorsque l'espace et le temps varient ensemble dans "l'espace-temps" on a la transformation suivante, appelée transformation de Lorentz:

$$(I): \begin{cases} t' = \frac{t - vx/c^2}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} & (t, x, y, z) \mathcal{R} \\ x' = \frac{x - vt}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} & \downarrow \\ & (t', x', y', z') \mathcal{R}' \\ y' = y \\ z' = z \end{cases}$$

A noter que cette transformation laisse invariante les équations de Maxwell de l'Electromagnétisme (EM). Historiquement c'est comme cela qu'on

l'a trouvée au début du XX^{ème} siècle,
empiriquement.

Posons :

$$\frac{v}{c} = \beta = \text{th } \theta$$

On a :

$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} = \frac{1}{\sqrt{1 - \beta^2}} = \frac{1}{\sqrt{1 - \text{th}^2 \theta}}$$

$$\text{th } \theta = \frac{\text{sh } \theta}{\text{ch } \theta}, \quad 1 - \text{th}^2 \theta = \frac{\text{ch}^2 \theta - \text{sh}^2 \theta}{\text{ch}^2 \theta} = \frac{1}{\text{ch}^2 \theta}$$

$$\Rightarrow \gamma = \text{ch } \theta$$

$$\text{et } \beta \gamma = \text{th } \theta \cdot \text{ch } \theta = \text{sh } \theta$$

D'où la transformation de Lorentz s'écrit :

$$(II): \begin{cases} t' = \gamma t - \beta \gamma x/c = \text{ch } \theta t - \text{sh } \theta x/c \\ x' = -\beta \gamma t c + \gamma x = -\text{sh } \theta t c + \text{ch } \theta x \\ y' = y \\ z' = z \end{cases}$$

Représentation matricielle :

$$\text{On a : } (X) = \begin{pmatrix} ct \\ x \\ y \\ z \end{pmatrix} \quad (X') = \begin{pmatrix} ct' \\ x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix}$$

$$(\Lambda) \text{ telle que : } (X) = (\Lambda)(X')$$

$$\Rightarrow (X') = (\Lambda)^{-1}(X) \quad \text{et d'après (II) :}$$

$$(\Lambda)^{-1} = \begin{pmatrix} \cosh \theta & -\sinh \theta & 0 & 0 \\ -\sinh \theta & \cosh \theta & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Pour avoir la transformation inverse de $(\Lambda)^{-1}$: (Λ) on change v en $-v$ donc β en $-\beta$ et θ en $-\theta$.

$$\Rightarrow (\Lambda) = \begin{pmatrix} \cosh\theta & \sinh\theta & 0 & 0 \\ \sinh\theta & \cosh\theta & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$(X) = (\Lambda)(X') \Leftrightarrow \begin{pmatrix} ct \\ x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cosh\theta & \sinh\theta & 0 & 0 \\ \sinh\theta & \cosh\theta & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} ct' \\ x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix}$$

$$(X') = (\Lambda)^{-1}(X) \Leftrightarrow \begin{pmatrix} ct' \\ x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cosh\theta & -\sinh\theta & 0 & 0 \\ -\sinh\theta & \cosh\theta & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} ct \\ x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

- L'espace-temps de Minkowski est un espace affine de $\mathbb{R}^4$. Il est parfois noté: $\mathbb{M}$
C'est un espace pseudo-euclidien muni de la métrique (η_{ij})

$$(\eta_{ij}) = \begin{pmatrix} -1 & & & \\ & 1 & & \\ & & 1 & \\ 0 & & & 1 \end{pmatrix} \quad ds^2 = -c^2 dt^2 + dx^2 + dy^2 + dz^2$$

$$(X) \in \mathbb{M}$$

$$(X) = \begin{pmatrix} ct \\ x \\ y \\ z \end{pmatrix} \text{ ou } \begin{pmatrix} x^0 \\ x^1 \\ x^2 \\ x^3 \end{pmatrix} \quad 5$$

signature: $(-+++)$